Devoir Surveillé 09

Le vendredi 1er Avril 2022

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [[1;n]]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [[1;n]]$. Donner la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i,j) \in [[1;n]]^2$ tel que $i \neq j$.
4. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$.

Partie II

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.

Exercice 2

F est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels).

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$
   où $f_1 : x \mapsto \sin x\,;\quad f_2 : x \mapsto x\sin x\,;\quad f_3 : x \mapsto \cos x\,;\quad f_4 : x \mapsto x\cos x$.
2. Soit $\psi : f \mapsto f'$ la dérivation définie sur F. On note D la restriction de ψ à E.
   (a) Montrer que D est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer $\operatorname{Ker}(D)$. En déduire que D est une bijection de E sur E.
3. λ est un réel, Id_E est l'application identique de E.
   (a) Déterminer, selon les valeurs de λ, le rang de $D^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_E$.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + \mathrm{Id}_E$.
   (c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + \mathrm{Id}_E$ est l'application nulle de E.
   (d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.
4. On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.
   (a) Vérifier que V est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V.
   Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $a\,\mathrm{Id}_E + b\,D^2$ où $a \neq b$.
   (c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?

Les parties **II** *et* **III** *sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie* **I**.

Exercice 3

Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I, dont la dérivée f' est continue sur I.

Partie I

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.
   (a) Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
   (b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (c) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(t) = \dfrac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$.
   Montrer que ψ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.
2. Soit a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \quad \text{tend vers 0 lorsque } \lambda \text{ tend vers } +\infty \tag{1}$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit S_n sur $[0, \pi]$ par : $S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.
   (a) Montrer, *sans récurrence*, que : $$\forall\, t \in]0, \pi[, \quad S_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{\sin t} \tag{2}$$
   Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.
   (b) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{\sin t}\,dt$.

Partie II

4. (a) Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,\sin\big((2n+1)\,t\big)\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{t}\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. (a) Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
   On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.
   Comparer $F\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)$ et I_n.
   (b) Soit x réel, $x \geqslant \dfrac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ (dépendant de x), tel que :
$$(2n+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\frac{\pi}{2}.$$
   On note $\alpha(x) = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$
   Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

6. (a) Soit x et y réels, tels que $0 < x < y$. Montrer que : $\displaystyle\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{x}$

   (on effectuera une intégration par parties).

   (b) En déduire que : $\forall\, x > 0, \quad \big|\ell - F(x)\big| \leqslant \dfrac{2}{x}$

Partie III

7. (a) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que :

   $\displaystyle\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$ (α et β sont désormais ainsi fixés).

   (b) En déduire que $\displaystyle 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\, S_n\!\left(\frac{t}{2}\right)\,dt$ est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

   (c) On définit la fonction h sur $]0, \pi]$ par : $h(t) = \dfrac{\alpha t + \beta t^2}{\sin \frac{t}{2}}$.

   Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$

8. On définit les suites $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2}$ $(n \geqslant 1)$ et $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geqslant 0)$.

   (a) Déduire des questions précédentes que la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge, et donner sa limite.

   (b) Montrer que la suite $\big(v_n\big)_{n\geqslant 0}$ converge, et donner sa limite.