Devoir Surveillé 09 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^x = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c$$

et

$$Q(0) = P(0) = c.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad Q(x) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c,$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{Q \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.}}$$

2. Le résultat de la question précédente signifie que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Reste donc à démontrer la linéarité de φ. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. On pose $Q_1 = \varphi(P_1), Q_2 = \varphi(P_2)$ et $Q = \varphi(\lambda P_1 + \mu P_2)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$Q(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(\lambda P_1(t) + \mu P_2(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{1}{x}\int_0^x P_1(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{x}\int_0^x P_2(t)\,\mathrm{d}t = \lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x)$
et $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2)(0) = (\widetilde{\lambda P_1 + \mu P_2})(0) = \lambda\widetilde{P_1}(0) + \mu\widetilde{P_2}(0) = \lambda\varphi(P_1)(0) + \mu\varphi(P_2)(0)$
d'où $\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)$. En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$

3. On a vu que, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\varphi(P)(X) = \frac{a}{3}X^2 + \frac{b}{2}X + c$. Il s'ensuit que

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = \frac{1}{2}X \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^2) = \frac{1}{3}X^2$$

et donc que

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.}$$

4. La matrice de la famille (P_0, P_1, P_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3$ donc la famille (P_0, P_1, P_2) est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme elle est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 alors c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\boxed{\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Comme (c_0, c_1, c_2) est la famille des composantes de P dans la base $\mathcal{F}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{P}(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

En évaluant cette relation en 1 et -1, on obtient

$$\widetilde{P}(1) = 4c_2 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{P}(-1) = 4c_0.$$

Par ailleurs, en dérivant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \widetilde{P}'(x) = 2c_0(x-1) + c_1(x+1) + c_1(x-1) + 2c_2(x+1),$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $x = 1$,

$$\widetilde{P}'(1) = 2c_1 + 4c_2.$$

On en déduit que

$$\boxed{c_0 = \frac{\widetilde{P}(-1)}{4}, \qquad c_1 = \frac{\widetilde{P}'(1) - \widetilde{P}(1)}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{P(1)}{4}.}$$

5. On pose $Q_0 = \varphi(P_0) \quad Q_1 = \varphi(P_1) \quad Q_2 = \varphi(P_2)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q_0}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x-1)^3+1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 - x + 1$,

donc, lorsque $P = P_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q_0}(-1)}{4} = \frac{7}{12}, \qquad c_1 = \frac{\widetilde{Q_0}'(1) - \widetilde{Q_0}(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\widetilde{Q_0}(1)}{4} = \frac{1}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(P_0) = \frac{7}{3}P_0 - \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q_1}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t^2-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_0^x = \frac{1}{3}x^2 - 1$,
donc, lorsque $P = P_1$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q_1}(-1)}{4} = -\frac{1}{6}, \qquad c_1 = \frac{\widetilde{Q_1}'(1) - \widetilde{Q_1}(1)}{2} = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = \frac{\widetilde{Q_1}(1)}{4} = -\frac{1}{6}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(P_1) = -\frac{1}{6}P_0 + \frac{2}{3}P_1 - \frac{1}{6}P_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\widetilde{Q_2}(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\frac{(t+1)^3}{3}\right]_0^x = \frac{(x+1)^3-1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 + x + 1$,
donc, lorsque $P = f_0$, on obtient

$$c_0 = \frac{\widetilde{Q_2}(-1)}{4} = \frac{1}{12}, \qquad c_1 = \frac{\widetilde{Q_2}'(1) - \widetilde{Q_2}(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\widetilde{Q_2}(1)}{4} = \frac{7}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(P_2) = \frac{1}{12}P_0 - \frac{1}{3}P_1 + \frac{7}{12}P_2.}$$

On en déduit que

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

Exercice 2
Partie I

$\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{\sin t}{t}$

1. (a) $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{t}\,\dfrac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} + o(t^5)}$. En composant avec $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + o(u^3)$, où $u = \frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{120} + o(t^5)$, il vient $\dfrac{1}{\sin t} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{t}{6} + \frac{7\,t^3}{360} + o(t^4)$
$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{t}{6} - \frac{7\,t^3}{360} + o(t^4)}$$

(b) La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ puisqu'elle l'est sur tout intervalle où $\sin t$ ne s'annule pas (comme somme et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$).
Utilisons ce développement limité pour étudier φ au voisinage de 0.
• $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0 • $\dfrac{\varphi(t) - 0}{t - 0} = -\frac{1}{6} + o(t) \xrightarrow{t\to 0} -\dfrac{1}{6}$
donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$ •Enfin $\varphi'(t) = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)}{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^5)}$
montre que $\lim_{t\to 0}\varphi'(t) = -\frac{1}{6} = \varphi'(0)$, donc φ' est continue en 0.
Conclusion $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

Remarques : φ étant définie en 0, l'existence d'un $DL_1(0)$ assure de la continuité et la
dérivabilité de φ en 0, mais ne peut pas prouver la continuité de φ'.
On peut aussi utiliser le théorème de la "dérivabilité d'une fonction prolongée",

(c) Le plus simple est de noter que $\psi(t) = 1 - t\,\varphi(t)$ pour tout $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, (même pour $t = 0$). ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Conclusion
$\boxed{\psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

Remarque : il est également possible d'utiliser la méthode de la question précédente

2. On montre classiquement ce lemme (dit lemme d'Abel) :
g et $u : t \mapsto -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$; on peut intégrer par parties :
$$\int_a^b g(t)\underbrace{\sin(\lambda t)}_{u'(t)}\,dt = \left[-g(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\right]_a^b + \int_a^b g'(t)\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,dt$$
Continues sur le segment $[a, b]$, g et g' y sont bornées ;
il existe deux réels M_0 et M_1 tels que $\forall\, t \in [a,b]$, $|g(t)| \leqslant M_0$ et $|g'(t)| \leqslant M_1$.
En majorant $\cos(t)$ par 1, avec $\lambda > 0$ et $a < b$, on majore ***<u>en valeur absolue</u>*** :
•le crochet par $\dfrac{2M_0}{\lambda}$ car $|g(b) - g(a)| \leq |g(b)| + |g(a)| \leq 2M_0$
•puis intégrale : $\left|\int_a^b g'(t)\dfrac{\cos(\lambda t)}{\lambda}\,dt\right| \leqslant \int_a^b \dfrac{|g'|}{\lambda} \leqslant (b-a)\frac{M_1}{\lambda}$ Ainsi :

$0 \leqslant \left|\int_a^b g(t)\,\sin(\lambda t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\,M_0+(b-a)\,M_1}{\lambda}$.

Par pincement, on établit ainsi le lemme $\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\,\sin(\lambda t)\,dt = 0}$

3. (a) $t \in]0, 2\pi[$. En remarquant que $2\cos(2kt) = e^{-i\,2kt} + e^{i\,2kt}$ et $1 = e^{i\,0t}$, sans récurrence, on reconnaît une somme de termes de suite géométrique de raison $e^{i\,2t} \neq 1$:

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{i\,2kt} = \frac{e^{i\,2(n+1)t} - e^{-i\,2nt}}{e^{2it}-1} = \frac{e^{it}\,(e^{i\,(2n+1)t} - e^{-i\,(2n+1)t})}{e^{i\,t}(e^{i\,t} - e^{-i\,t})}$$

d'où le résultat (après simplification) $\boxed{S_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}}$

Remarque on peut aussi utiliser la méthode classique avec la partie réelle de $\sum_{k=1}^n e^{i\,2kt}$,

ou bien faire le produit suivant qui se simplifie (principe des dominos) :

$$\sin(t)\times S_n(t) = \sin t + \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin\big((2k+1)t\big) - \sin\big((2k-1)t\big)\Big)$$

Par ailleurs, $S_n(0) = 1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(0)$ et $S_n(\pi) = 1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(2k\pi)$

donne immédiatement $\boxed{S_n(0) = S_n(\pi) = 2n+1}$

Remarque : on peut aussi confirmer ce dernier résultat en exploitant la continuité de $t \mapsto S_n(t)$

(b) D'après ce qui précède :

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2kt)\,dt$$

Il est clair que toutes les intégrales des $\cos(2kt)$ sont nulles d'où $\boxed{J_n = \frac{\pi}{2}}$

Partie II

4. (a) il a été prouvé au **1)** que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le lemme du **2**, cette limite existe et vaut 0. $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\,\sin\big((2n+1)t\big)\,dt = 0}$

(b) En séparant l'expression de φ, on trouve que l'intégrale précédente vaut

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,dt = I_n - J_n = I_n - \frac{\pi}{2}$$

Comme l'intégrale tend vers 0, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\pi}{2}}$

5. (a) Comme $\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t} = 1$, f se prolonge par continuité en posant $\boxed{f(0) = 1}$

Dans l'intégrale I_n, le changement de variable $u = (2n+1)\,t$, de classe $\mathcal{C}^1$, donne $du = (2n+1)\,dt$ et $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,dt = \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,du$

c'est-à-dire $\boxed{I_n = F\Big((2n+1)\frac{\pi}{2}\Big)}$

(b) $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité $(2n+1)\frac{\pi}{2} \leqslant x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$ équivaut à

$n \leqslant \frac{x}{\pi} - \frac{1}{2} < n+1$, soit à $\boxed{n = E\Big(\frac{x}{\pi} - \frac{1}{2}\Big)}$

$\alpha(x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ donc $\alpha(x) \leqslant x < \alpha(x) + \pi$. L'inégalité $0 < \alpha(x) \leqslant x$ permet d'écrire $\left|\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \int_{\alpha(x)}^x \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,dt \leqslant \int_{\alpha(x)}^x \frac{dt}{t}\,dt = \ln\left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisqu'alors $\alpha(x) \to +\infty$ et $1 \leqslant \frac{x}{\alpha(x)} < 1 + \frac{\pi}{\alpha(x)}$ montre par pincement que $\frac{x}{\alpha(x)} \to 1$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t}\,dt = 0}$

(c) Par relation de Chasles, on a : $F(x) = F\big(\alpha(x)\big) + \int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

La comparaison du **5a** montre que $F\big(\alpha(x)\big) = I_n$ (qui tend vers $\frac{\pi}{2}$), et le deuxième terme tend vers 0 (puisque n tend vers $+\infty$ avec x) $\boxed{\ell = \lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}}$

valeur de l'intégrale dite de ***Fresnel****.*

6. (a) L'intégration par parties donne l'égalité (u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$\int_x^y \underbrace{\sin t}_{=u'(t)}\ \underbrace{\frac{1}{t}}_{=v(t)}\,dt = \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y} + \int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

On en déduit par croissance, puisque $x < y$, que :

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\frac{\cos y}{y}\right| + \left|\frac{\cos x}{x}\right| + \left|\int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right|$$

En majorant $|\cos|$ par 1, on a alors :

$$\left|\int_x^y \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leqslant \int_x^y \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt \leqslant \int_x^y \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

Pour conclure, puisque x et y sont positifs, on trouve :

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \le \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{2}{x}}$$

(b) Ceci s'écrit encore $\left|F(y)-F(x)\right| \leqslant \frac{2}{x}$. Il ne reste plus qu'à faire tendre y vers $+\infty$, ce qui donne, à la limite $\boxed{\left|\ell - F(x)\right| \leqslant \frac{2}{x}}$

Remarque : ceci donne une idée de la rapidité de la convergence.

Partie III

7. (a) On effectue deux intégrations par parties successives (qu'on justifiera)

$$\int_0^\pi (\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt = \underbrace{\left[(\alpha t+\beta t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi (\alpha+2\beta t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$\int_0^\pi (\alpha+2\beta t)\sin(nt)\,dt = \left[(\alpha+2\beta t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi 2\beta\,\frac{\cos(nt)}{n}\,dt}_{=0}$$

La condition $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(nt)\,dt=\frac{1}{n^2}$ équivaut à

$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{(-1)^n\left(\alpha+2\beta\pi\right)-\alpha-1}{n^2}=0$ qui impose $\boxed{\alpha=-1,\ \beta=\frac{1}{2\pi}}$

(b) Par définition de α et β, la somme $\sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k^2}-\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\cos(kt)\,dt\right)$ vaut 0.

Par définition de $S_n(t)$, elle vaut : $2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}-\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\left(S_n\left(\frac{t}{2}\right)-1\right)dt.$

On en déduit : $2\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}-\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)S_n\left(\frac{t}{2}\right)dt=-\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\,dt=$ $\boxed{\frac{\pi^2}{3}}$

(c) On s'économise en remarquant que $h(t)=2(\alpha+\beta t)\,\psi\left(\frac{t}{2}\right)$, or ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ $\boxed{h \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$

8. $u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}$ $\quad v_n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{(2k+1)^2}$

(a) En posant $\lambda=n+\frac{1}{2}$, on écrit $(\alpha t+\beta t^2)\,S_n\left(\frac{t}{2}\right)=h(t)\,\sin(\lambda t)$ comme au **I** ;

donc le lemme d'Abel **2** montre que $\lim_{h\to+\infty}\int_0^\pi(\alpha t+\beta t^2)\,S_n\left(\frac{t}{2}\right)dt=0$

On en déduit que (u_n) converge et que sa limite est $\frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{3} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$

(b) L'astuce consiste à écrire $u_{2p}-v_p=\sum_{k=1}^p\frac{1}{(2k)^2}=\frac{u_p}{4}$ (les termes impairs disparaissent). Or (u_{2p}) et (u_p) convergent vers une même limite $\lambda=\frac{\pi^2}{6}$,

donc (v_p) converge aussi, et sa limite est $\frac{3\lambda}{4} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$