

Devoir Maison 19

Pour le lundi 2 juin 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi_n : \begin{cases}]0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}} dt \end{cases}$

- (a) Montrer que φ_n est définie, monotone.
 (b) Justifier que φ_n est dérivable et calculer sa dérivée.

Confirmer le sens de variation obtenu au **1-a**.

2. Montrer : $\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$.

3. Soit $\omega_k = (2k+1) \frac{\pi}{2n}$.

- (a) Décomposer¹ en éléments simples dans $\mathbb{C}(t)$ la fraction $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$.
 (b) En déduire que $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1}$.
 (c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt = \pi - \omega_k$.

4. (a) Montrer que pour tout réel θ non congru à 0 modulo π ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

(b) Utiliser ce qui précède (et une dérivation) pour trouver les expressions de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sin \omega_k$$

(c) En déduire la valeur exacte de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n(x)$.

1. On trouve $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-\frac{i}{n} \sin \omega_k}{t - e^{i \omega_k}}$