

Devoir Maison 19 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^{2n}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable sur tout segment de $\mathbb{R}$. Ceci prouve que φ_n est définie sur $]0, 1]$

D'autre part, f est positive donc

$$0 < x < x' \leq 1 \Rightarrow x < x' \leq 1 \leq \frac{1}{x'} < \frac{1}{x} \Rightarrow \int_{x'}^{1/x'} f \leq \int_x^{1/x} f$$

(les bornes sont dans l'ordre usuel).

Ceci prouve que

$$\varphi_n \text{ est décroissante sur }]0, 1]$$

- (b) Étant continue, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Si F est une de ces primitives, nous avons $\varphi_n(x) = [F(t)]_x^{1/x} = F(\frac{1}{x}) - F(x)$. Ceci prouve que φ_n est dérivable (somme et composée de fonctions dérivables), avec

$$\varphi'_n(x) = -\frac{1}{x^2} F'(\frac{1}{x}) - F'(x) = -\frac{1}{x^2} \frac{x^{2n}}{x^{2n}+1} - \frac{1}{x^{2n}+1}$$

$$\varphi_n \text{ est dérivable et } \varphi'_n(x) = -\frac{x^{2n-2}+1}{x^{2n}+1}$$

φ'_n étant négative, ceci confirme que φ_n est décroissante.

2. Présentons deux méthodes différentes :

méthode par les dérivées : pour les mêmes raisons que **1-b** :

$$\text{— } \psi(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = G(1) - G(x) \text{ où } G'(t) = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}}$$

montre que $\psi'(x) = -G'(x) = -\frac{1+x^{2n-2}}{1+x^{2n}} = \varphi'_n(x)$

$$\text{— } \rho(x) = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} (G(\frac{1}{x}) - G(x)) \text{ qui montre que}$$

$$\rho'(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2} G'(\frac{1}{x}) - G'(x) \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} \frac{(x^{2n-2}+1)x^{2n}}{x^{2n}+1} + \frac{1+x^{2n-2}}{1+x^{2n}} \right) = \varphi'_n(x)$$

$$\text{— Sur l'intervalle }]0, 1], \varphi_n, \psi \text{ et } \rho \text{ ont des dérivées égales et vérifient}$$

$$\varphi_n(1) = \psi(1) = \rho(1) = 0 : \text{ elles sont égales.}$$

$$\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

méthode par changement de variable : (la classe des fonctions le permet)

écrivons $\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^{2n}} + \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}}$, et effectuons, dans la deuxième intégrale, le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1 : t = \frac{1}{u}$, $dt = -\frac{1}{u^2} du$:

$$\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^{2n}} = \int_1^x \frac{-\frac{1}{u^2} du}{1+(\frac{1}{u})^{2n}} = \int_x^1 \frac{u^{2n-2} du}{u^{2n}+1}$$

Par linéarité :

$$\varphi_n(x) = \int_x^1 \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

Le même changement sur l'intervalle $[x, \frac{1}{x}]$ donne $\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$ d'où

$$2\varphi_n(x) = \int_x^{1/x} \frac{1}{1+t^{2n}} dt + \int_x^{1/x} \frac{t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

Toujours par linéarité :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt$$

3. (a) La fraction $\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{N(t)}{D(t)}$ est de degré négatif (représentant irréductible). Ses pôles sont les racines d'ordre $2n$ de -1 : $\alpha_k = e^{i(1+2k)\pi/2n} = e^{i\omega_k}$, $0 \leq k \leq 2n-1$.

Les pôles sont simples donc

$$\frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{\beta_k}{t-\alpha_k}, \quad \text{où} \quad \beta_k = \frac{N(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} = \frac{1+\alpha_k^{2n-2}}{2n\alpha_k^{2n-1}}$$

En remarquant que $\alpha_k^{2n-1} = \frac{\alpha_k^{2n}}{\alpha_k} = -\frac{1}{\alpha_k}$, et $\alpha_k^{2n-2} = -\frac{1}{\alpha_k^2}$, il vient

$$\beta_k = \frac{1 - \frac{1}{\alpha_k^2}}{-2n \frac{1}{\alpha_k}} = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \alpha_k \right) = \frac{1}{2n} (\overline{\alpha_k} - \alpha_k) = -\frac{i}{n} \sin \omega_k$$

$$\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{-\frac{i}{n} \sin \omega_k}{t - e^{i\omega_k}}$$

- (b) En regroupant les conjugués ($\alpha_k = \overline{\alpha_{2n-1-k}}$), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} &= -\frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sin \omega_k}{t-\alpha_k} + \frac{\sin \omega_{2n-1-k}}{t-\overline{\alpha_k}} \right) \\ &= -\frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sin \omega_k}{t-\alpha_k} - \frac{\sin \omega_k}{t-\overline{\alpha_k}} \right) \\ &= -\frac{i}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_k \frac{\alpha_k - \overline{\alpha_k}}{t^2 - (\alpha_k + \overline{\alpha_k})t + \alpha_k \overline{\alpha_k}} \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2 \cos \omega_k t + 1}$$

- (c) Le calcul d'une primitive est classique :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt &= \int \frac{\sin^2 \omega_k}{(t - \cos \omega_k)^2 + \sin^2 \omega_k} dt \\
&= \int \frac{1}{\left(\frac{t - \cos \omega_k}{\sin \omega_k}\right)^2 + 1} dt \\
&= \int \frac{\sin \omega_k}{u^2 + 1} du \quad \text{avec } u = \frac{t - \cos \omega_k}{\sin \omega_k}, \quad du = \frac{dt}{\sin \omega_k} \\
&= \sin \omega_k \cdot \operatorname{Arctan} \frac{t - \cos \omega_k}{\sin \omega_k}
\end{aligned}$$

Déterminons les limites :

- $t \rightarrow 0$ $\operatorname{Arctan} \frac{t - \cos \omega_k}{\sin \omega_k} \rightarrow \operatorname{Arctan} \frac{-\cos \omega_k}{\sin \omega_k} = \operatorname{Arctan} \left(\tan(\omega_k - \frac{\pi}{2}) \right) = \omega_k - \frac{\pi}{2}$
(car $\omega_k - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puisque $0 \leq k \leq n-1 \Rightarrow \omega_k \in]0, \pi[$)
- $t \rightarrow +\infty$ $\operatorname{Arctan} \frac{t - \cos \omega_k}{\sin \omega_k} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (dans les mêmes conditions $\sin \omega_k > 0$)
- Ainsi, quand x tend vers 0 :

$$\int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt = \sin \omega_k \left(\underbrace{\operatorname{Arctan} \frac{\frac{1}{x} - \cos \omega_k}{\sin \omega_k}}_{\rightarrow \pi/2} - \underbrace{\operatorname{Arctan} \frac{x - \cos \omega_k}{\sin \omega_k}}_{\rightarrow \omega_k - \pi/2} \right)$$

montre que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt = (\pi - \omega_k) \sin \omega_k$$

4. (a) Soit $\theta \neq 0 [\pi]$, $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta)$ sont les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)\theta}$, somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i2\theta} \neq 1$. Ainsi :

$$C_n + iS_n = \frac{e^{i(2n+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i2\theta} - 1} = e^{i\theta} \frac{e^{i2n\theta} - e^{-i2n\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = e^{i\theta} \frac{2i \sin(n\theta)}{2i \sin(\theta)}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta)}{2 \sin(\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin^2(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

- (b) En dérivant la première égalité par rapport à θ , on obtient (après changement de signe)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \sin((2k+1)\theta) = \frac{\sin(2n\theta) \cos(\theta) - 2n \cos(2n\theta) \sin(\theta)}{2 \sin^2(\theta)}$$

Avec $\theta = \frac{\pi}{2n}$, ce qui précède donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin^2(n \frac{\pi}{2n})}{\sin \frac{\pi}{2n}} \quad \text{soit} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_k = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \sin(2k+1) \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin(\frac{2n\pi}{2n}) \cos(\frac{\pi}{2n}) - 2n \cos(\frac{2n\pi}{2n}) \sin(\frac{\pi}{2n})}{2 \sin^2(\frac{\pi}{2n})}$$

soit, en multipliant par $\frac{\pi}{2n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sin \omega_k = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}$$

(c) Comme $\varphi_n(x) = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{1+t^{2n-2}}{1+t^{2n}} dt = \frac{1}{2} \int_x^{1/x} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_x^{1/x} \frac{\sin^2 \omega_k}{t^2 - 2t \cos \omega_k + 1} dt}_{\rightarrow (\pi - \omega_k) \sin \omega_k} \quad \text{nous avons} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n(x) =$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \omega_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \sin \omega_k$$

$$= \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{n} \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$$

CONCLUSION

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n(x) = \frac{\pi}{2n \sin \frac{\pi}{2n}}$$