

Devoir Maison 18

Pour le lundi 13 mai 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Partie -A-

1. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant

$$(1) : \forall x \in \mathbb{R} \quad g(2x) = g(x)$$

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comparer $g(x)$ et $g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

- (b) En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

2. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_2$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0, et qui vérifient :

$$(2) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2f(x)$$

Soit f une telle fonction.

- (a) Que vaut $f(0)$?

- (b) On pose $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Peut-on prolonger g par continuité en 0 ?

- (c) On note encore g la fonction prolongée. Calculer $g(2x)$ en fonction de $g(x)$.

En déduire g puis f .

- (d) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_2$?

3. On souhaite déterminer l'ensemble $\mathcal{E}_3$ des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0, et qui vérifient :

$$(3) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = (f(x))^2$$

Soit f une telle fonction.

- (a) Quelles sont les différentes valeurs possibles pour $f(0)$?

- (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$

- (c) Montrer que :

i) $(\exists a \neq 0 \quad f(a) = 0) \Rightarrow f(0) = 0$

ii) $(\exists a \neq 0 \quad f(a) \neq 0) \Rightarrow f(0) = 1$.

- (d) En déduire que, si f n'est pas la fonction nulle, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$.

- (e) On pose alors $\gamma(x) = \ln(f(x))$.

Utiliser la fonction γ pour trouver la forme de la fonction f .

- (f) Quel est l'ensemble $\mathcal{E}_3$?

Partie -B-

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, continues en 0.

On définit l'application φ qui à $f \in \mathcal{E}$ associe l'application $\varphi(f) = g$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad g(x) = f(2x) + f(x)$$

1. (a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- (b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$).
- (c) Montrer que φ est injective.
2. Soit g une fonction continue en 0, décroissante sur $\mathbb{R}_+$, telle que $g(0) = 0$.
Pour tout réel $x \geq 0$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
- (a) En étudiant les suites $(S_{2n}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer que la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On note $S(x)$ sa limite.
- (b) Montrer que la fonction $S : x \mapsto S(x)$ est continue en 0 (on utilisera un encadrement de $S(x)$).
3. (a) Soit g une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$, continue en 0 et telle que $g(0) = 0$. En utilisant la fonction S de la question précédente, montrer que l'équation $\varphi(f) = g$ admet une solution et une seule.
- (b) Montrer que le résultat **B-3-a** précédent reste valable quand on ne suppose plus que $g(0) = 0$.

$$4. \text{ On pose : } \forall x > 0 \quad g(x) = \frac{\cos \frac{\pi \ln x}{\ln(2)}}{|\ln x| + 1}.$$

- (a) Quelle valeur faut-il donner à $g(0)$ pour que $g \in \mathcal{E}$?
- (b) On veut démontrer que l'équation $\varphi(f) = g$ n'a pas de solution.
Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une fonction $f \in \mathcal{E}$ telle que $\varphi(f) = g$.
- i) Exprimer $f(x)$ en fonction de $n, S_n(x)$, et de $f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.
- ii) Transformer $g\left(\frac{1}{2^k}\right)$ et en déduire la valeur de $S_n(1)$.
- iii) En déduire une majoration de $S_{2n}(1) - S_n(1)$.
- iv) En déduire que $S_n(1)$ ne peut pas avoir une limite finie quand $n \rightarrow +\infty$. Quel est le comportement de $S_n(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$?
- v) Utiliser alors le i) pour trouver une contradiction et conclure.

Indications et conseils

Partie -A-

Très abordable.

*On peut éventuellement admettre le résultat de la question **A-3-d**.*

1. (a) Commencer la comparaison avec $n = 1$, puis avec $n = 2$. Généraliser.
(b) Une suite converge vers 0. Regarder son image par g . . .
2. (b) Ne pas oublier que f est dérivable en 0.
(c) Vérifier que g satisfait toutes les conditions de la question précédente et conclure.
(d) Attention ! Ce qui précède est-il nécessaire ? suffisant ? les deux ?
3. (b) Montrer que, pour tout réel x , $f(x)$ est un carré.
(c) S'inspirer du **A-1** (utiliser la remarque ci-dessus pour calculer $f\left(\frac{a}{2^n}\right)$)
(d) Utilise ce qui précède (*ou peut se contenter d'admettre ce résultat et poursuivre le problème*).
(e) Vérifier que γ satisfait les conditions de **A-2** et conclure.
(f) Même mise en garde qu'au **A-2-d**.

Partie -B-

Certaines parties sont plus délicates mais restent abordables.

Cependant, les questions **B-1-a..b** **B-2** **B-4-a** sont classiques et doivent être traitées.

1. (b) Attention ! linéaire ne suffit pas.
(c) *On peut admettre ce résultat et passer à la suite.*
La démonstration utilise le noyau et se traite en plusieurs étapes : si $f \in \text{Ker } \varphi$, calculer $f\left(\frac{x}{2}\right)$, puis $f\left(\frac{x}{4}\right)$, puis $f\left(\frac{x}{4^n}\right)$ en fonction de $f(x)$, puis s'inspirer du **A-1-b**.
2. (a) Technique des suites adjacentes (déjà rencontrée)
(b) La valeur $S(0)$ ne pose pas de problème.
Utiliser $S_1(x)$ et $S_2(x)$ pour encadrer $S(x)$, puis passer à la limite.
3. (a) Calculer $\varphi(S)(x)$. Ceci passe par une limite d'une expression qui comporte $S_n(2x)$. On transformera $S_n(2x)$ avant de calculer la limite.
(b) Utiliser une autre fonction g_1 qui vérifie les conditions de **B-3-a**.
4. (a) Simple.
(b) Délicat.