

Devoir Maison 18 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie -A-

1. g continue en 0 vérifie (1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(2x) = g(x)$

(a) Pour tout réel x , en appliquant (1) avec $\frac{x}{2}$ nous obtenons $g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right)$.

Puis en l'appliquant à $\frac{x}{4}$ il vient $g\left(\frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{4}\right)$, etc.

Ainsi, par une récurrence évidente : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right)$

(b) Quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{2^n}$ tend vers 0.

La fonction g étant continue en 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}_{=g(x)} = g(0)$ d'où

$$g(x) = g(0).$$

Conclusion

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = g(0) \Rightarrow g \text{ est constante}}$$

2. f dérivable en 0 vérifie (2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = 2f(x)$.

(a) En appliquant (2) avec $x = 0$ il vient $f(0) = 2f(0)$ d'où $\boxed{f(0) = 0}$

(b) En remarquant que, pour x non nul, $g(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, l'hypothèse " f est dérivable en 0" montre que g admet une limite finie en 0 qui vaut $f'(0)$. Le prolongement par continuité en 0 permet de conclure $\boxed{g \text{ est continue en 0 si } g(0) = f'(0)}$

(c) Il est clair que : $\forall x \neq 0 \quad g(2x) = \frac{f(2x)}{2x} = \frac{2f(x)}{2x} = g(x)$.

L'égalité $g(2x) = g(x)$ reste visiblement valable pour $x = 0$.

La fonction g est continue en 0 et vérifie (1). La question **A-1-b** montre que g est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \lambda$, ce qui donne $\forall x \neq 0 \quad f(x) = \lambda x$.

Cette égalité est encore valable pour $x = 0$ puisque $f(0) = 0$ (question **A-2-a**).

Ainsi

$$\boxed{f : x \mapsto \lambda x \text{ est linéaire}}$$

(d) Ce qui précède donne une condition nécessaire : $f \in \mathcal{E}_2 \Rightarrow f$ linéaire.

La réciproque est vraie puisqu'une fonction linéaire est dérivable en 0 et vérifie (2). Cette condition est donc suffisante. $\boxed{f \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow f \text{ est linéaire } (x \mapsto \lambda x)}$

3. f dérivable en 0 vérifie (3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = (f(x))^2$.

(a) On applique (3) avec $x = 0$. Il vient $f(0) = (f(0))^2$

$$\text{d'où } f(0) (f(0) - 1) = 0.$$

Conclusion

$$\boxed{f(0) \in \{0, 1\}}$$

(b) Pour tout réel x , en appliquant (3) avec $\frac{x}{2}$ nous obtenons $f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Dans $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $f(x) \geq 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0} :$$

(c) Remarquons que, f étant positive ou nulle, le calcul ci-dessus (b) donne le résultat suivant :

$$\boxed{(4) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = (f(x))^{\frac{1}{2}}}$$

Exploitions ce résultat.

i) Si $a \neq 0$ vérifie $f(a) = 0$, alors (4) donne $f\left(\frac{a}{2}\right) = 0^{1/2} = 0$.

En itérant ce raisonnement, $f\left(\frac{a}{2^2}\right) = 0$, puis $f\left(\frac{a}{2^3}\right) = 0$ etc.

La fonction f étant continue en 0 (car elle est dérivable),

il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(\frac{a}{2^n}\right)}_{=0} = f(0)$ Conclusion $\boxed{\exists a \neq 0, f(a) = 0 \Rightarrow f(0) = 0}$

ii) Si $a \neq 0$ vérifie $f(a) \neq 0$, la formule (4) donne $f\left(\frac{a}{2}\right) = (f(a))^{1/2}$

puis $f\left(\frac{a}{2^2}\right) = \left((f(a))^{1/2}\right)^{1/2} = (f(a))^{1/2^2}$.

En itérant, on obtient facilement $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(\frac{a}{2^n}\right) = (f(a))^{1/2^n}$.

Passons à la limite (quand $n \rightarrow \infty$) :

• $f(a) > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a))^{1/2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{2^n} \ln f(a)\right)} = e^0 = 1$.

• f est continue en 0 donc $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{a}{2^n}\right) = f(0)$

• Les deux quantités sont égales, les limites aussi donc $f(0) = 1$

Conclusion

$$\boxed{\exists a \neq 0, f(a) \neq 0 \Rightarrow f(0) = 1}$$

(d) Si f n'est pas la fonction nulle, il existe un réel a non nul tel que $f(a) \neq 0$ (dans le cas contraire, f nulle sur $\mathbb{R}^*$ serait, par continuité, nulle en 0). Le

ii) de la question précédente montre qu'alors $f(0) = 1$. Mais le i) montre

que f ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}^*$ (cela entraînerait $f(0)=0$). Finalement f ne s'annule pas. Comme $f \geq 0$ on en déduit que f est strictement positive

$$f \neq 0 \text{ (fonction nulle)} \Rightarrow f > 0$$

(e) On peut alors poser $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(x) = \ln(f(x))$

• $\gamma = \ln \circ f$ est dérivable en 0 (f est dérivable en 0 et $\ln$ est dérivable en $f(0) = 1$).

• γ vérifie (2) : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \gamma(2x) = \ln(f(2x)) = \ln(f(x))^2 = 2 \ln(f(x)) = 2\gamma(x)$

La question **A-2** montre alors que γ est linéaire, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(f(x)) = \lambda x \Leftrightarrow f(x) = e^{\lambda x}$$

Conclusion $f \in \mathcal{E}_3 : f \neq 0 \Rightarrow f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est une exponentielle

(f) Quelles sont les fonctions de $\mathcal{E}_3$?

- la fonction nulle convient (elle est dérivable en 0 et vérifie (3))
- si $f \neq 0$, il faut que ce soit une exponentielle
- mais réciproquement, toute exponentielle convient (elle est dérivable en 0 et vérifie (3) : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\lambda(2x)} = (e^{\lambda x})^2$). En conclusion

les éléments de $\mathcal{E}_3$ sont les fonctions exponentielles et la fonction nulle

Partie -B-

$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow f$ est continue en 0.

$$\varphi(f) = g \text{ est définie par } \forall x \geq 0, \quad g(x) = f(2x) + f(x)$$

1. (a) Montrons que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, +\infty[, \mathbb{R}))$.

- $\mathcal{E} \neq \emptyset$ car la fonction nulle est dans $\mathcal{E}$.
- $\forall f, g \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda f + g \in \mathcal{E}$ puisque définie sur $[0, +\infty[$, continue en 0.

Conclusion

$\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

(b) Pour montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, il faut montrer

• $f \in \mathcal{E} \Rightarrow g = \varphi(f) \in \mathcal{E}$, ce qui est vrai (g est définie sur $[0, +\infty[$ continue en 0)

• φ est linéaire : $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\varphi(\lambda f_1 + f_2)}_{=g} = \lambda \underbrace{\varphi(f_1)}_{=g_1} + \underbrace{\varphi(f_2)}_{=g_2}.$

En effet : $\forall x \geq 0$

$$\begin{aligned} g(x) &= (\lambda f_1 + f_2)(2x) + (\lambda f_1 + f_2)(x) \\ &= \lambda(f_1(2x) + f_1(x)) + f_2(2x) + f_2(x) \\ &= \lambda g_1(x) + g_2(x) = (\lambda g_1 + g_2)(x) \end{aligned}$$

Conclusion

$\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$

(c) φ étant linéaire, pour montrer l'injection, étudions son noyau.

Soit $f \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \geq 0, \quad f(2x) + f(x) = 0$.

Alors, $\forall x \geq 0, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) = -f(x)$ puis $f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x)$ et par une récurrence évidente : $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = (-1)^n f(x)$ d'où l'on tire $f\left(\frac{x}{4^n}\right) = f(x)$.

Par un raisonnement proche de celui du **A-1-b**, en passant à la limite, la continuité de f en 0 donne $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(\frac{x}{4^n}\right)}_{=f(x)} = f(0)$ soit $f(x) = f(0)$.

f est donc une fonction constante λ .

Mais la relation $f(2x) + f(x) = 0$ devient $2\lambda = 0$ donc f est la fonction nulle.

Conclusion

φ est injective

$$2. x \geq 0 \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

(a) Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En effet :

• S_{2n} est décroissante puisque $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n+2}(x) - S_{2n}(x) &= (-1)^{2n} g\left(\frac{x}{2^{2n+1}}\right) + (-1)^{2n+1} g\left(\frac{x}{2^{2n+2}}\right) \\ &= g\left(\frac{x}{2^{2n+1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^{2n+2}}\right) < 0 \\ &\quad \text{(puisque } g \text{ est décroissante, } x > 0 \text{ et } \frac{x}{2^{2n+1}} > \frac{x}{2^{2n+2}}) \end{aligned}$$

• S_{2n+1} est croissante puisque $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n+3}(x) - S_{2n+1}(x) &= (-1)^{2n+1} g\left(\frac{x}{2^{2n+2}}\right) + (-1)^{2n+2} g\left(\frac{x}{2^{2n+3}}\right) \\ &= -g\left(\frac{x}{2^{2n+2}}\right) + g\left(\frac{x}{2^{2n+3}}\right) > 0 \\ &\quad \text{(puisque } g \text{ est décroissante, } x > 0 \text{ et } \frac{x}{2^{2n+2}} > \frac{x}{2^{2n+3}}) \end{aligned}$$

• $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 puisque $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(x) - S_{2n}(x) &= (-1)^{2n} g\left(\frac{x}{2^{2n+1}}\right) = -g\left(\frac{x}{2^{2n+1}}\right) \rightarrow 0 \\ &\quad \text{puisque } g \text{ est continue en 0 et } g(0) = 0. \end{aligned}$$

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) ont donc une limite commune, ce qui prouve que

la suite (S_n) converge (vers cette limite notée $S(x)$). (S_n) converge vers $S(x)$

(b) Pour montrer que S est continue en 0, calculons sa valeur et sa limite :

• sa valeur en 0 : $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(0) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{0}{2^k}\right) = 0$ (car $g(0) = 0$)

donc

$$S(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(0) = 0$$

• encadrons $S_n(x)$: $S(x)$ étant la limite de deux suites adjacentes, nous avons $S_2(x) \leq S(x) \leq S_1(x)$ c'est-à-dire $\underbrace{g\left(\frac{x}{2}\right)}_{\rightarrow g(0)=0} - \underbrace{g\left(\frac{x}{4}\right)}_{\rightarrow g(0)} \leq S(x) \leq$

$$\underbrace{g\left(\frac{x}{2}\right)}_{\rightarrow g(0)=0}$$

La continuité de g en 0, avec $g(0) = 0$, et le théorème des pincements montre que $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = 0$

Conclusion

$$S \text{ est continue en 0 et } S(0) = 0$$

3. (a) La question précédente montre que $S \in \mathcal{E}$.

Calculons $\varphi(S)$.

$$\forall x \geq 0, \varphi(S)(x) = S(2x) + S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(2x) + S_n(x)).$$

Transformons $S_n(2x)$:

$$\begin{aligned} S_n(2x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{2x}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) \\ &= -\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l-1} g\left(\frac{x}{2^l}\right) = -(-g(x) + S_{n-1}(x)) \end{aligned}$$

On en déduit

$$S_n(2x) + S_n(x) = g(x) + S_n(x) - S_{n-1}(x) = g(x) + \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{borné}} \underbrace{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}_{\rightarrow g(0)=0}$$

et sa limite (continuité de g) d'où $\forall x \geq 0, \varphi(S)(x) = g(x)$. $\varphi(S) = g$

S est donc une solution de l'équation $\varphi(f) = g$.

Comme φ est injective :

$$S \text{ est l'unique solution de } \varphi(f) = g$$

(b) Si $g(0) \neq 0$, on change de variable et on utilise la linéarité de φ

• Remarquons que, si f est la fonction constante λ , alors $\varphi(f) = 2\lambda$.

Nous avons donc $\varphi\left(\frac{g(0)}{2}\right) = g(0)$

• La fonction $g_1 = g - g(0)$ est continue en 0 et vérifie $g_1(0) = 0$. L'équation $\varphi(f) = g_1$ admet une unique solution S_1 $\varphi(S_1) = g - g(0)$

(solution que l'on obtiendrait en utilisant la méthode précédente).

• φ étant linéaire, nous avons $\varphi\left(S_1 + \frac{g(0)}{2}\right) = \varphi(S_1) + \varphi\left(\frac{g(0)}{2}\right) = g_1 + g(0) = g$.

g admet donc un antécédent.

• Cet antécédent est unique (car φ injective).

Conclusion

toute fonction décroissante continue en 0 admet un unique antécédent par φ

$$4. \forall x > 0, g(x) = \frac{\cos \frac{\pi \ln x}{\ln(2)}}{|\ln x| + 1}$$

(a) g est définie continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour que $g \in \mathcal{E}$, il faut et il suffit de prolonger g par continuité en 0, ce qui est simple puisque le numérateur est borné et que le dénominateur tend vers l'infini.

$$g \in \mathcal{E} \Leftrightarrow g(0) = 0$$

(b) Dans cette question, $f \in \mathcal{E}$ vérifie $\varphi(f) = g$, donc $\forall x \geq 0, g(x) = f(2x) + f(x)$.

$$\text{i) Dans ces conditions, } \begin{cases} g\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f\left(\frac{x}{2}\right) \\ g\left(\frac{x}{2^2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2^2}\right) \\ g\left(\frac{x}{2^3}\right) = f\left(\frac{x}{2^2}\right) + f\left(\frac{x}{2^3}\right) \\ \dots\dots\dots \\ g\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

En ajoutant, il reste :

$$S_n(x) = f(x) + (-1)^{n-1} f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$\text{ii) } \bullet \text{ Transformons } g\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{\cos\left(\pi \ln \frac{1}{2^k}\right)}{\left|\ln\left(\frac{1}{2^k}\right)\right| + 1} = \frac{\cos(-k\pi)}{|-k \ln 2| + 1} = \frac{(-1)^k}{1 + k \ln 2}$$

$$\bullet \text{ On en déduit : } S_n(1) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} g\left(\frac{1}{2^k}\right) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k \ln 2}$$

$$\text{iii) Ce calcul donne également } S_{2n}(1) = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{1 + k \ln 2}$$

donc

$$S_{2n}(1) - S_n(1) = -\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{1 + k \ln 2}$$

Comme $(\ln 2 > 0 \text{ et } k \leq 2n) \Rightarrow 0 < 1 + k \ln 2 \leq 1 + 2n \ln 2$,

nous en déduisons $\frac{1}{1+2n\ln 2} \leq \frac{1}{1+k\ln 2}$ puis

$S_{2n}(1) - S_n(1) \leq -\frac{n}{1+2n\ln 2}$
--

iv) Si $S_n(1)$ avait une limite finie (quand $n \rightarrow \infty$), alors l'inégalité précédente donne $0 \leq -\frac{1}{\ln 2}$, ce qui est impossible.

$S_n(1)$ n'a pas de limite finie

La suite $(S_n(1))$ est visiblement décroissante ($S_n(1) - S_{n-1}(1) = -\frac{1}{1+n\ln 2} < 0$).

N'ayant pas de limite finie, c'est que

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(1) = -\infty$
--

v) Utilisons le résultat **B-4-b-i)** avec $x = 1$: $S_n(1) = f(1) + (-1)^{n-1}f\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Ainsi, $\left|(-1)^{n-1}f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| = |S_n(1) - f(1)|$ qui montre que $\left|f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|$ tend vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$, ce qui est en contradiction avec " f continue en 0".

L'existence de $f \in \mathcal{E}$ telle que $\varphi(f) = g$ conduit à une contradiction.

Conclusion

g n'a pas d'antécédent par φ dans $\mathcal{E}$
