Classe de Seconde (à compléter)

Classe de Seconde (à compléter)

Classe de Première

Dérivation

Le nombre dérivé d'une fonction f en une valeur a est le nombre noté $f'(a)$ tel que :

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

C'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x=a$.

Équation de la tangente

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Exemple :

$f(x)=x^2$. Déterminer le nombre dérivé en a.

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}&=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\&=\frac{h(2a+h)}{h}\\&=2a+h.\end{aligned}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a.$$

Fonctions dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	sur
$k\in\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x^n\ (n\in\mathbb{Z})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}$

Fonction	Dérivée
$k\times u$ ($k\in\mathbb{R}$, u : fonction)	$k\times u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$
$g(ax+b)$	$a\times g'(ax+b)$

Fonction exponentielle

Propriétés algébriques Pour x et y réels :

$$\boxed{\begin{aligned}e^x\times e^y&=e^{x+y}\\ \frac{1}{e^x}&=e^{-x}\\ \frac{e^x}{e^y}&=e^{x-y}\\ \left(e^x\right)^n&=e^{nx},\ n\in\mathbb{Z}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}e^x=e^y &\iff x=y\\ e^x>e^y &\iff x>y\\ e^x<e^y &\iff x<y\end{aligned}}$$

Dérivation

$$\boxed{\left(e^x\right)'=e^x} \qquad \boxed{\left(e^{kx}\right)'=ke^{kx},\quad k\in\mathbb{R}}$$

Suites

Définition

Une suite est une fonction à variable entière. Elle peut être définie de deux manières :

- *de façon explicite*, avec une expression.
  Par exemple : $u_n=n^2+6$;
- *par récurrence*, en exprimant un terme en fonction de son précédent.
  Par exemple, $u_{n+1}=5+u_n$, qui signifie qu'un terme est égal à 5 de plus que son précédent. Dans ce cas, il faut toujours connaître un terme (par exemple u_0) pour en déduire les autres.

Sens de variation

On calcule $u_{n+1}-u_n$ et on regarde le signe du résultat.

- Si pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n>0$ alors $u_{n+1}>u_n$, donc la suite (u_n) est croissante.
- Si pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n<0$ alors $u_{n+1}<u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

Exemple 1 :

Pour tout entier n, on pose $u_n=n^2+n+1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left[(n+1)^2+(n+1)+1\right]-\left[n^2+n+1\right] \\ &= \left[n^2+2n+1+n+1+1\right]-\left[n^2+n+1\right] \\ &= \left[n^2+3n+3\right]-\left[n^2+n+1\right] \\ &= n^2+3n+3-n^2-n-1 \\ &= 2n+2>0. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2 :

Pour tout entier n, on pose $u_{n+1}=u_n^2+3u_n+2$, avec $u_0=2$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= (u_n^2+3u_n+2)-u_n \\ &= u_n^2+2u_n+2 \\ &= (u_n^2+2u_n+1)+1 \\ &= (u_n+1)^2+1>0 \end{aligned}$$

car un carré est toujours positif ou nul.

Donc (u_n) est strictement croissante.

Majorants et minorants

M est un majorant d'une suite (u_n) si, pour tout entier n, $u_n \leqslant M$.

M est un minorant d'une suite (u_n) si, pour tout entier n, $u_n \geqslant M$.

Exemple 3 :

$u_n = 3-\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} 0<\frac{1}{n}<1 &\iff -1<-\frac{1}{n}<0 \\ &\iff 2<3-\frac{1}{n}<3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est minorée par 2, et majorée par 3. La suite est *bornée*.

Suites arithmétiques

Une suite est arithmétique si la différence de deux termes consécutifs quelconques est constante : pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n=r$.

$$\boxed{u_{n+1}=u_n+r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &u_n=u_0+nr \\ &u_n=u_1+(n-1)r \\ &u_n=u_p+(n-p)r,\ p\in\mathbb{N} \end{aligned}}$$

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_0+u_1+\cdots+u_n &= (n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2} \\ &= (n+1)\times\left(u_0+\frac{1}{2}nr\right) \end{aligned}}$$

Suites géométriques

Une suite est géométrique si le passage entre deux termes consécutifs quelconques se fait par un coefficient multiplicatif constant : pour tout entier n, $u_{n+1}=q\times u_n$.

$$\boxed{u_{n+1}=q\times u_n}$$

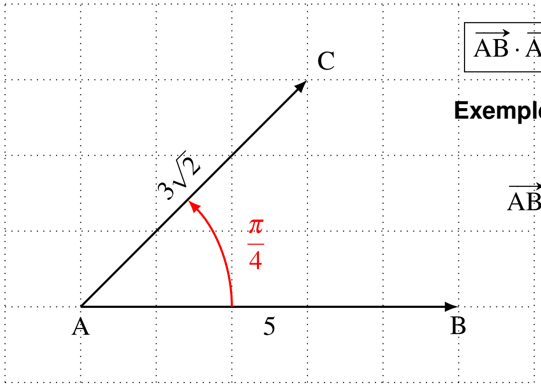
$$\boxed{\begin{aligned} &u_n=u_0\times q^n \\ &u_n=u_1\times q^{n-1} \\ &u_n=u_p\times q^{n-p},\ p\in\mathbb{N} \end{aligned}}$$

$$\boxed{1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad q\neq 1}$$

$$\boxed{u_0+u_1+\cdots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Produit scalaire

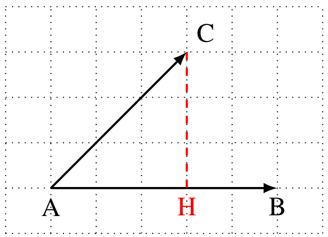
Les différentes formules



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$

Exemple :

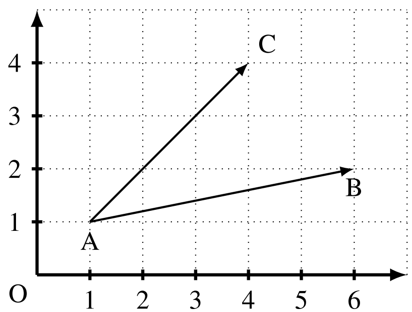
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\&=5\times3\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=15.\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{cases}AH\times AB & \text{si } 0\leqslant\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}\\-AH\times AB & \text{si } \frac{\pi}{2}\leqslant\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\leqslant\pi\end{cases}$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AH\times AB\\&=5\times3\\&=15.\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=xx'+yy' \quad \text{avec } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

Exemple :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=5\times3+1\times3\\&=15+3\\&=18.\end{aligned}$$

Remarque :

à l'aide de la première et de la dernière formule, on peut calculer l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ pour le dernier exemple.

En effet, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=18=AB\times AC\times\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$. On en déduit alors que :

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{18}{AB\times AC}=\frac{18}{\sqrt{5^2+1^2}\times\sqrt{3^2+3^2}}\approx0{,}832050294338.$$

D'où $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\approx\cos^{-1}(0{,}832050294338)\approx34°$.

Propriétés générales

Orthogonalité :

$$\vec{u}\perp\vec{v}\iff\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Commutativité :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$$

Distributivité :

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

Bilinéarité :

$$\left(k_1\vec{u}\right)\cdot\left(k_2\vec{v}\right)=\left(k_1\times k_2\right)\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Propriétés avec les normes

$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

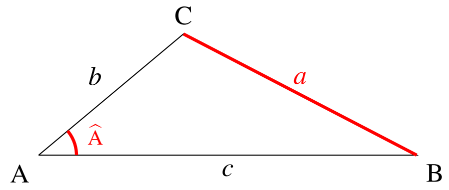
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Applications du produit scalaire

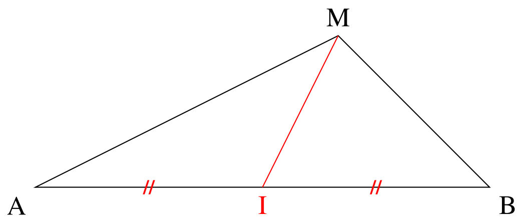
Formule d'Al-Kashi

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}}$$



Théorème de la médiane

$$\boxed{\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 + 2\mathrm{MI}^2}$$



Lignes de niveau

Pour tous points A, B et M du plan, avec I milieu de [AB].

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \iff M \text{ est sur le cercle de diamètre [AB]}}$$

Centre de gravité

G centre de gravité du triangle ABC, M est un point quelconque du plan.

$$\boxed{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}}$$

$$\boxed{MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2}$$

Equation cartésienne d'un cercle

Equation cartésienne d'un cercle de centre $\Omega\,(ab)$ et de rayon r :

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Vecteur normal et vecteur directeur à une droite $(d)\ :\ ax+by+c=0$

$$\boxed{\text{Vecteur normal : } \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{Vecteur directeur : } \vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}$$

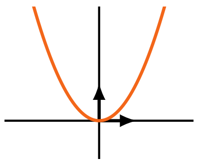
Classe de Terminale

Limites

Fonctions et limites de référence

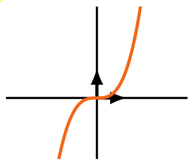
$x \mapsto x^n$, avec n pair

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$



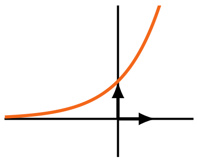
$x \mapsto x^n$, avec n impair

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$



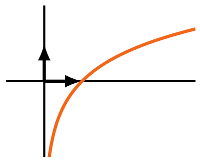
$x \mapsto e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



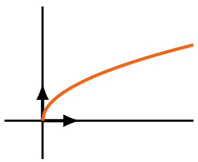
$x \mapsto \ln(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$



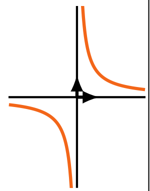
$x \mapsto \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Non dérivable en 0

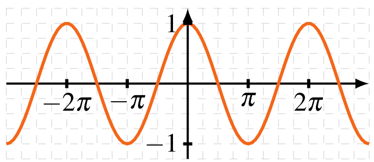


$x \mapsto \frac{1}{x}$

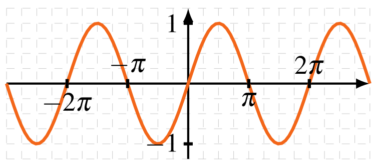
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



$x \mapsto \cos(x)$



$x \mapsto \sin(x)$



Asymptotes :

— Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$.
— Si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ (b fini), la droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe de f.

Suites géométriques : Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Opérations sur les limites (suites ou fonctions)

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x \to a} (fg)(x)$	$l_1 l_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**F.I.**

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$l_2 \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**F.I.**	

Méthodes pour lever une indéterminée :

— Factorisation par le termes de plus haut degré
— Quantité conjuguée (différence de racines carrées)
— Utilisation des croissances comparées

Croissances comparées : Pour tout entier naturel non nul n,

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

Compositions de limites

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$

Théorèmes sur les limites

Théorème de comparaison : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

— Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$
— Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Théorème d'encadrement : Soit a un réel. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si f et h admettent une même limite **finie** ℓ en a, alors g admet également une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ell$.

Suites monotones :

- Si (u_n) est **croissante et majorée** par M, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
- Si (u_n) est **décroissante et minorée** par m, alors (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.

Il est en revanche faux de dire que la limite vaut automatiquement le majorant ou le minorant en question !

Algorithme de seuil

```
#Suite croissante
def seuil(s):
  u = #valeur de u(0)
  n = 0
  while u < s :
    u = #expression de u(n+1)
    n = n + 1
  return n
```

```
#Suite decroissante
def seuil(s):
  u = #valeur de u(0)
  n = 0
  while u > s :
    u = #expression de u(n+1)
    n = n + 1
  return n
```

Théorème du point fixe : Soit f une fonction définie, **continue** et à valeurs dans un intervalle I . Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in I$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur $]a;b[$.
Alors pour tout réel k compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur $]a;b[$.

Si de plus, la fonction f est **strictement monotone** sur $]a;b[$, alors une telle solution est unique.

```
#Algorithme de dichotomie
#Resolution approchee de f(x)=0
def dicho(f, a, b, p):
  while abs(b-a) > 10 ** (-p):
    m = (a+b)/2
    if f(a) * f(m) < 0:
      b = m
    else :
      a = m
  return m
```

Propriétés de calcul

Second degré : Racines et signe de ax^2+bx+c. On pose $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Signe de a à l'extérieur des racines.
- Si $\Delta = 0$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Signe de a partout.
- Si $\Delta < 0$, pas de racine réelle, signe de a partout.

Avec le logarithme : Soit $x > 0$, on a, $\ln(x) > 0$ ssi $x > 1$. Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\ln(ab) = \ln(a)+\ln(b)$ $\qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a)-\ln(b)$ $\qquad \ln(a^n) = n\times\ln(a)$

Dérivées, primitives

Fonction f	Dérivée	**UNE** Primitive F
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n+1)x^{n-1}}$, $(n \geqslant 2)$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ (non exigible)
$x \mapsto e^{ax+b}$	$x \mapsto a\times e^{ax+b}$	$x \mapsto \dfrac{e^{ax+b}}{a}$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto x\ln(x)-x$ (non exigible)
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto -\sin(x)$	$x \mapsto \sin(x)$

Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u'+v'$ $\qquad (uv)' = u'v+uv'$ $\qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

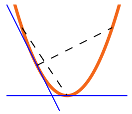
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $\qquad (e^u)' = u'e^u$ $\qquad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ $\qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$(u^n)' = n\times u'\times u^{n-1}$ $\qquad (\cos(u))' = -u'\times\sin(u)$ $\qquad (\sin(u))' = u'\times\cos(u)$

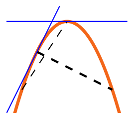
Équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

Convexité, concavité

Fonction convexe
- En-dessous de ses cordes, au-dessus de ses tangentes
- Dérivée croissante, dérivée seconde positive



Fonction concave
- Au-dessus de ses cordes, en-dessous de ses tangentes
- Dérivée décroissante, dérivée seconde négative



Équations différentielles

Équation homogène $y' + ay = 0$: Solutions $x \mapsto Ce^{-ax}$, $C \in \mathbb{R}$

Second membre constant $y' + ay = b$

- Recherche d'une solution constante φ : on pose $y' = 0$, on trouve $\varphi = \frac{b}{a}$
- Solutions générale : $x \mapsto Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$

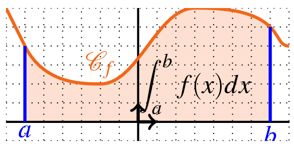
Second membre fonction $y' + ay = g$

- Recherche ou vérification d'une solution particulière φ
- Solutions générale : $x \mapsto Ce^{-ax} + \varphi$

Conditions initiales : Une fois la solution générale trouvée, on remplace x par x_0 et on résout une équation pour trouver C.

Calcul intégral

Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive : **aire sous la courbe** exprimée en unité d'aire
Notation $\int_a^b f(x)dx$



Si pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, l'aire entre les courbes de f et g vaut $\int_a^b (g-f)(x)dx$.

Théorème fondamental : $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Calcul d'intégrale : Si F est une primitive de f, $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriétés de l'intégrale

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt\,; \qquad \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Croissance : Si pour tout réel $x \in [a;b]$, on a $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Valeur moyenne d'une fonction : $\boxed{m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

Intégration par parties (IPP) : $\boxed{\int_a^b (uv')(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)dx}$

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de B sachant A : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Formule des probabilités totales : On considère un événement B et A_1, A_2, ..., A_n un système complet d'événements de l'univers Ω. Alors,

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \ldots + P(B\cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)$$

Indépendance : Deux événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Variable aléatoire

Définition : Fonction définie sur un univers Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$

Loi d'une variable aléatoire réelle : Fonction qui à tout réel k associe $P(X = k)$.

Espérance : Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n,

$$\boxed{E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_n \times P(X = x_n)}$$

Interprétation : valeur moyenne de la variable aléatoire

Linéarité de l'espérance : $E(aX + b) = a \times E(X) + b$, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Variance : $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2$. Mesure de dispersion.

$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$. Si X et Y sont **indépendantes**, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Épreuve, loi, schéma de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli : épreuve à deux issues, le succès S et l'échec $\overline{S}$

Loi de Bernoulli de paramètre p : prend la valeur 1 avec proba p et 0 avec proba $1-p$

Schéma de Bernoulli : Succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Loi binomiale

Loi binomiale de paramètres n et p : compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à n épreuves, chaque épreuves ayant une probabilité de succès de p. $X \sim \mathscr{B}(n,p)$

Formules Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, $\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$

$E(X)=np$ $\qquad$ $V(X)=np(1-p)$ $\qquad$ $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

Géométrie dans l'espace

Colinéarité et applications

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ ou $\vec{v}=k\vec{u}$.

Droite passant par A dirigée par $\vec{u}$: ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

— Deux droites sont **parallèles** ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
— Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Coplanarité et applications

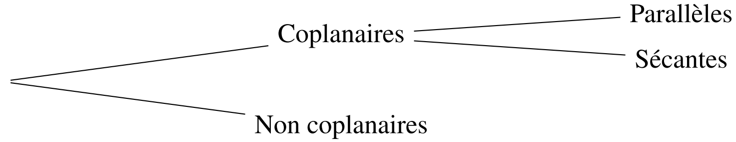
Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si l'un de ces vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres (par exemple $\vec{u}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$).

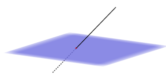
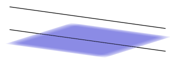
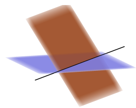
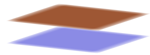
Plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires : ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

— Quatre points A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan passant par ces points
— Quatre points A, B, C et D sont coplanaires ssi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
— Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan contenant ces deux droites

Positions relatives

Pour deux droites :



Droite sécante à un plan	Droite parallèle à un plan	Plans sécants selon une droite	Plans parallèles
			

Repérage dans l'espace

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point O de l'espace et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe des réels uniques x, y et z tq $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Si on a $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\\lambda y+\mu y'\\\lambda y+\mu y'\end{pmatrix}$

Représentation paramétrique de droite

passant par le point $A(x_A,y_A,z_A)$ dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. $\left\{\begin{array}{l}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$

Applications

— Lire directement un point et un vecteur directeur d'une droite
— Vérifier si un point appartient à une droite : remplacer x, y et z par les coordonnées de ce point et trouver une unique valeur de t qui convient.
— **Droites parallèles** : vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires
— **Droites sécantes** : système à résoudre en identifiant les x, y, z des deux représentations. On remplace ensuite la valeur de t trouvée pour le point d'intersection.

Produit scalaire

Produit scalaire : si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Vecteurs orthogonaux : produit scalaire nul. $\qquad$ $\vec{u}\cdot\vec{u}=||\vec{u}||^2$. En particulier, $||\vec{u}||=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ $\quad \vec{u}\cdot(k\vec{v}+k'\vec{w})=k(\vec{u}\cdot\vec{v})+k'(\vec{u}\cdot\vec{w})$ $\quad (k\vec{v}+k'\vec{w})\cdot\vec{u}=k(\vec{v}\cdot\vec{u})+k'(\vec{w}\cdot\vec{u})$

Produit scalaire dans un repère ORTHONORMÉ : $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=xx'+yy'+zz'$

Csq : $||\vec{u}||=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $AB=||\overrightarrow{AB}||=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

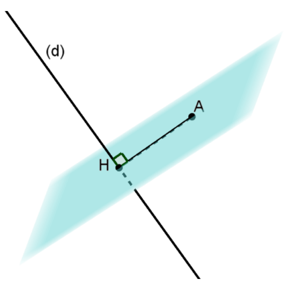
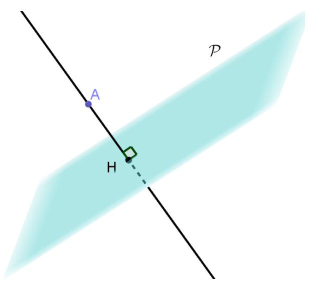
Pour déterminer la mesure d'un angle, on utilise alors $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

- Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si elles sont orthogonales ET sécantes.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan

Vecteur normal à un plan : Vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.
Si $(A,\vec{u},\vec{v})$ est un repère du plan (P), $\vec{n}$ est normal à (P) ssi $\vec{u}\cdot\vec{n}=\vec{v}\cdot\vec{n}=0$.

- Une droite est parallèle (ou contenue) à un plan si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal au plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal à ce plan
- Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires
- Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Projeté orthogonal

Projeté orthogonal de A sur la droite (d) : intersection de la droite (d) et du plan passant par A orthogonal à (d).	Projeté orthogonal de A sur le plan (P) : intersection du plan (P) et de la droite passant par A et orthogonale à (P).
	

Distance d'un point à une droite (ou un plan) = distance du point à son projeté orthogonal

Équation cartésienne de plan

Passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$: $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$

Applications :

- Déterminer directement un vecteur normal à un plan
- Vérifier si un point appartient au plan : remplacer x, y et z par les coordonnées du point, vérifier si l'égalité est juste.

Intersection d'une droite et d'un plan

- Établir une représentation paramétrique de la droite
- remplacer x, y et z dans l'équation du plan par ceux de la représentation paramétrique
- trouver le paramètre t en résolvant l'équation
- remplacer ce paramètre dans la représentation de la droite.

Algorithmique

Manipulation de listes ; **Attention** : les indices des éléments d'une liste commencent à 0.

```
L1 = [] # liste vide stockee dans L1
L2 = [1, 3, 7, 6]

a = L2[0] # element d'indice 0 de L2
b = L2[1] # element d'indice 1 de L2
c = L2[-1] # dernier element de L2

c = len(L) # nombre d'elements de L2

L2.append(8) # ajoute 8 a la fin de la liste L2
L2.remove(3) #retire la premiere apparition de 3 de la liste L2
```

Génération par compréhension

```
[expression for objet in liste if condition]
```

Itération et parcours

```
range(a,b,pas) # "liste" de tous les entiers de a inclus a b exclus en
    progressant d'un pas donne

for i in range(n): # pour i allant de 0 a n-1
  ... # indenter la partie a repeter

for i in L : # si L est une liste, parcourt les elements de L dans l'ordre
  ... # indenter la partie a repeter
```