Devoir Surveillé 08

Le mercredi 23 Avril 2025
8h-12h

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$.

On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Partie I

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit donc a, b et c trois réels tels que $a\,p + b\,q + c\,r = 0$ (où 0 désigne la fonction nulle).

1. L'étudiante Antoinette a évalué l'expression $(a\,p + b\,q + c\,r)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.
2. Antoinette a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ?

   Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre *"tout le monde sait bien que $e \simeq 2.71828$"* ?
3. L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $a\,p + b\,q + c\,r$. Faites comme lui et concluez.
4. L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.
5. Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

   On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0)\,,\ f'(0)\,,\ f(1)\big)$.
6. Prouver que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $f = a\,p + b\,q + c\,r$ un élément de $\mathcal{E}$.

   Exprimer a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et f(1).

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe

$$\varphi(f) = A\,p + B\,q + C\,r\,, \quad \text{où} \quad \begin{cases} A = \frac{2}{e-1}\,f(0) + f'(0) + \frac{2}{e\,(e-1)}\,f(1) \\ B = -\frac{1}{e-1}\,f(0) - \frac{1}{e\,(e-1)}\,f(1) \\ C = \frac{e-2}{e-1}\,f(0) - f'(0) - \frac{1}{e\,(e-1)}\,f(1) \end{cases}$$

8. On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $\theta(a,b,c) = (a,b,-c)$.
   Montrer que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathcal{E}$.
9. Exprimer $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r.
10. Exprimer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.
11. Déterminer $\varphi \circ \varphi$ et M^2. Que pouvez-vous dire de φ ?

Partie III

12. On note $P = \{f \in \mathcal{E} \;—\; \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par φ.
    Montrer que $P = \{f \in \mathcal{E} \;—\; f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; Déterminer une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$. Prouver que $\mathcal{P}$ est de dimension deux. Exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.
13. On note $D = \{f \in \mathcal{E} \;—\; \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par φ. Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$. Prouver que $\mathcal{D}$ est de dimension un, et déterminer des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.
14. Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.
15. Justifier l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.
16. Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$? Caractérisez géométriquement φ.

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question **-4-**).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est associée.

17. Montrez que $\mathcal{F}$ est un sou-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?
18. Soit $\big(P_k\big)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

    $$\forall\ k,\ 1 \leqslant k < q, \Rightarrow \big(P_{k+1}(x) - P_k(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty\big)\,.$$

    On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$. Montrer que la famille $\big(f_k\big)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est libre.

Exercice 2
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [[1;n]]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [[1;n]]$. Donner la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i,j) \in [[1;n]]^2$ tel que $i \neq j$.
4. Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$.

Partie II

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

1. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}(Z_k = 1)$ et déterminer $\mathrm{P}(Z_k = k)$.
   (b) Montrer, pour tout $\ell \in [[1,n]]$: $\mathrm{P}(Z_{k+1} = \ell) = \dfrac{\ell}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell) + \dfrac{n-\ell+1}{n}\mathrm{P}(Z_k = \ell - 1)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

1. Rappeler la valeur de $\mathrm{P}(Z_k = 1)$. Déterminer $\mathrm{P}(Z_k \geq 5)$.
2. Montrer : $\mathrm{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.
3. On note, pour tout i de $[[1;4]]$, A_i l'événement :
   " la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages".
   (a) Montrer : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3) = 4\mathrm{P}(A_1) - 6\mathrm{P}(A_1 \cap A_2) + 4\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   (b) Calculer, $\mathrm{P}(A_1)$, $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.
   (c) En déduire : $\mathrm{P}(Z_k \leqslant 3)$, puis $P(Z_k = 3)$ et $P(Z_k = 4)$.

Exercice 3

F est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires :

Soit ψ l'application, définie sur F, qui, à une fonction f, associe sa dérivée f' :

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de F.

b) Est-ce un automorphisme ?

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels).

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$
   où $f_1 : x \mapsto \sin x$; $f_2 : x \mapsto x\sin x$; $f_3 : x \mapsto \cos x$; $f_4 : x \mapsto x\cos x$.
2. D est la restriction de ψ à E.
   (a) Montrer que D est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}\,(D)$. En déduire que D est une bijection de E sur E.
3. λ est un réel, Id_E est l'application identique de E.
   (a) Déterminer, selon les valeurs de λ, le rang de $D^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_E$.
   (b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + \mathrm{Id}_E$.
   (c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + \mathrm{Id}_E$ est l'application nulle de E.
   (d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.
4. On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.
   (a) Vérifier que V est un sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$.
   (b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V.
   Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $a\,\mathrm{Id}_E + b\,D^2$ où $a \neq b$.
   (c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?
5. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.
   (b) Déterminer le noyau de $\psi^2 + \mathrm{Id}_F$.
   (c) Montrer que le noyau de $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2$ est E.
   Montrer ensuite que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle : $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.