Devoir Surveillé 08 - Eléments de Correction

Exercice 1

$p : x \mapsto e^x \qquad q : x \mapsto e^{2x} \qquad r : x \mapsto e^{x^2} \qquad \mathcal{B} = (p, q, r) \qquad \mathcal{E} = \operatorname{Vect}(\mathcal{B})$

Partie I

$a, b, c \in \mathbb{R} \quad a\,p + b\,q + c\,r = 0$

1. Nous avons $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad a\,p(x) + b\,p(x) + c\,r(x) = 0$. En particulier pour $x = 0,\ 1,\ 2$. On obtient le système suivant (condition nécessaire)

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a\,e+b\,e^2+c\,e &= 0 \\ a\,e^2+b\,e^4+c\,e^4 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl|r} a + b + c &= 0 & 1 \\ a+b\,e+c &= 0 & -1 \\ a+b\,e^2+c\,e^2 &= 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl|r} a+b+c &= 0 & 1 \\ b(1-e) &= 0 & \\ a+b\,e^2+c\,e^2 &= 0 & -1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b &= 0 \\ c(1-e^2) &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0 \qquad \boxed{\mathcal{B} \text{ est une famille libre}}$$

2. Cette démonstration utilise implicitement $e \neq 1$ et $e^2 \neq 1$, ce qui est évident puisque la fonction "exp" strictement croissante sur $\mathbb{R}$ est injective, donc $0 \neq 1 \to e^0 \neq e^1$ et $0 \neq 2 \Rightarrow e^0 \neq e^2$.

3. Calculons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $a\,p + b\,q + c\,r$:

$$\begin{aligned}(a\,p+b\,q+c\,r)(x) &= a\,e^x + b\,e^{2x} + c\,e^{x^2} \\ &= a\left(1+x+\tfrac{x^2}{2}\right) + b\left(1+2x+\tfrac{4x^2}{2}\right) + c\left(1+x^2\right) + o(x^2) \\ &= (a+b+c) + (a+2b)\,x + \left(\tfrac{a}{2}+2b+c\right)x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

La fonction $a\,p + b\,q + c\,r$ étant la fonction nulle, la partie régulière de son $\mathrm{DL}_2(0)$ est le polynôme nul. <u>L'unicité de développement limité</u> permet d'écrire :

$$\left\{\begin{array}{rl|r} a+b+c &= 0 & 2 \\ a+2b &= 0 & \\ \frac{a}{2}+2b+c &= 0 & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ a+2b &= 0 \\ a-2b &= 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = 0$$

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est libre}}$

4. Au voisinage de $+\infty$, e^x est négligeable devant e^{2x} , lui même négligeable devant e^{x^2} . Ainsi, si $a\,p + b\,q + c\,r = 0$, alors :
   - •comme r ne s'annule pas, $a\,\frac{p}{r} + b\,\frac{q}{r} + c = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} a\,e^{x-x^2} + b\,e^{2x-x^2} + c = 0$, c'est-à-dire $c = 0$
   - •mais alors $a\,p + b\,q = 0 \Rightarrow a\,\frac{p}{q} + b = 0$ (q ne s'annule pas) d'où $\lim_{x\to+\infty} a\,e^{x-2x} + b = 0$, donc $b = 0$
   - •il reste alors $a\,p = 0$ d'où $a = 0$ (car p n'est pas la fonction nulle)

   Finalement : $a = b = c = 0$ donc $\boxed{\mathcal{B} \text{ est libre}}$

5. La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathcal{E}$: c'est une base de $\mathcal{E}$.
   Comme $\operatorname{Card}\mathcal{B} = 3$: $\boxed{\dim\mathcal{E} = 3}$

6. $\psi : \begin{cases} \mathcal{E} & \to \quad \mathbb{R}^3 \\ f & \mapsto \quad \big(f(0), f'(0), f(1)\big) \end{cases}$

   La linéarité de ψ découle de la linéarité de la dérivation : $\forall\ f, g \in \mathcal{E},\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\psi(f+\lambda\,g) &= \big((f+\lambda\,g)(0), (f+\lambda\,g)'(0), (f+\lambda\,g)(1)\big) \\ &= \big(f(0)+\lambda\,g(0), (f'+\lambda\,g')(0), f(1)+\lambda\,g(1)\big) \\ &= \big(f(0), f'(0), f(1)\big) + \lambda\,\big(g(0), g'(0), g(1)\big) = \psi(f) + \lambda\,\psi(g)\end{aligned}$$

   Il est clair que $p'(x) = p(x)$, $q'(x) = 2q(x)$ et $r'(x) = 2\,x\,r(x)$.
   L'image par ψ de la base $\mathcal{B}$ est donc

$$\big(\psi(p), \psi(q), \psi(r)\big) = \big((e^0, e^0, e^1), (e^0, 2\,e^0, e^2), (e^0, 0.e^0, e^1)\big) = \big((1,1,e), (1,2,e^2), (1,0,e)\big)$$

   L'application ψ est bijective si et seulement si cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$. Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ e & e^2 & e \end{vmatrix} = e(e-1)$ n'est pas nul

   $\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme}}$

   <u>*Note1*</u> [sans utiliser le déterminant] : $\mathbb{R}^3$ étant de dimension 3, il suffit de montrer que la famille est libre, ce qui se vérifie en résolvant le système $\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 2b &= 0 \\ ea + e^2b + ec &= 0 \end{cases}$ <u>*Note2*</u> en fait, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ e & e^2 & e \end{pmatrix}$ est la matrice de ψ dans la base $\mathcal{B} = (p, q, r)$ pour $\mathcal{E}$, et la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

7. L'application ψ étant linéaire bijective, nous avons

$$f = a\,p + b\,q + c\,r \Leftrightarrow \psi(f) = a \underbrace{\psi(p)}_{=(1,1,e)} + b \underbrace{\psi(q)}_{=(1,2,e^2)} + c \underbrace{\psi(r)}_{=(1,0,e)}$$

   ce qui se traduit par le système

$$\left\{\begin{array}{rl|r} a + b + c &= f(0) & -e \\ a + 2b &= f'(0) & \\ ea + e^2b + ec &= f(1) & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c &= f(0) \\ a + 2b &= f'(0) \\ +e(e-1)b &= -e\,f(0) + f(1) \end{cases}$$

   dont la résolution est simple.

$$\boxed{f = a\,p + b\,q + c\,r \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{e-1} f(0) + f'(0) - \frac{2}{e(e-1)} f(1) \\ b = -\frac{1}{e-1} f(0) \quad + \quad \frac{1}{e(e-1)} f(1) \\ c = \frac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) + \frac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}}$$

Partie II

$$\varphi(f) = A\,p + B\,q + C\,r \qquad \theta(a,b,c) = (a,b,-c)$$

8. On remarque immédiatement que $\varphi(f) = A\,p + B\,q + C\,r$, où A, B, C sont obtenus en remplaçant $f(1)$ par $-f(1)$ dans le résultat précédent, c'est-à-dire que $\underline{\varphi(f) = g}$ où $g \in \mathcal{E}$ vérifie $g(0) = f(0)$ et $g'(0) = f'(0)$ et $g(1) = -f(1)$

$\Leftrightarrow \big(g(0), g'(0), g(1)\big) = \big(f(0), f'(0), -f(1)\big)$

$\Leftrightarrow \psi(g) = \theta\left(\psi(f)\right)$

$\Leftrightarrow \psi \circ \varphi = \theta \circ \psi$ (car ceci est vérifié pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$).

ψ étant bijective, nous avons finalement $\boxed{\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi}$

θ est visiblement un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. Donc $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une composée d'isomorphismes, d'où $\boxed{\varphi \in GL(\mathcal{E}) \text{ (automorphisme de } \mathcal{E})}$

9. Il suffit ici d'appliquer les formules données pour A, B, C dans les trois cas suivants :

- $f = p \quad \big(f(0), f'(0), f(1)\big) = \big(1, 1, e\big) \Rightarrow \boxed{\varphi(p) = \frac{1}{e-1}\left((3+e)\,p - 2\,q - 2\,r\right)}$
- $f = q \quad \big(f(0), f'(0), f(1)\big) = \big(1, 2, e^2\big) \Rightarrow \boxed{\varphi(q) = \frac{1}{e-1}\left(4\,e\,p - (e+1)\,q - 2\,e\,r\right)}$
- $f = r \quad \big(f(0), f'(0), f(1)\big) = \big(1, 0, e\big) \Rightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{1}{e-1}\left(4\,p - 2\,q + (e-3)\,r\right)}$

10. Ceci donne immédiatement la matrice de φ $\boxed{M = \frac{1}{e-1}\begin{pmatrix} 3+e & 4\,e & 4 \\ -2 & -e-1 & -2 \\ -2 & -2\,e & e-3 \end{pmatrix}}$

11. En utilisant la question **8** : $\varphi \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi = \psi^{-1} \circ \theta^2 \circ \psi$.

Comme $\theta^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$, il vient $\boxed{\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}} \quad \text{et} \quad M^2 = I_3}$

φ est linéaire involutive, donc $\boxed{\varphi \text{ est une symétrie vectorielle de } \mathcal{E}}$

Partie III

12. $P = \left\{f \in \mathcal{E} \;—\; \varphi(f) = f\right\}$ l'ensemble des invariants par φ. En utilisant $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$ (question **8**), nous avons $f \in P \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = f \Leftrightarrow \theta \circ \psi(f) = \psi(f)$ (ψ est bijective).

Or (a,b,c) est invariant par θ si et seulement si $(a,b,c) = (a,b,-c) \Leftrightarrow c = 0$.

Comme $\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1))$ $\boxed{f \in P \Leftrightarrow f(1) = 0}$

Ce qui précède montre que P est le noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(1)$. C'est donc un hyperplan de $\mathcal{E}$ (donc un plan vectoriel puisque $\dim \mathcal{E} = 3$).

Note : on pouvait également dire que P est le noyau de $\varphi - \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$.

Pour terminer : $f = a\,p + b\,q + c\,r \in P \Leftrightarrow f(1) = 0 \Leftrightarrow a\,p(1) + b\,q(2) + c\,r(1) = 0$

c'est-à-dire $\Leftrightarrow a\,e + b\,e^2 + c\,e = 0.$ $\boxed{P \text{ est le plan d'équation } a + e\,b + c = 0}$

Une base possible pour P est $\boxed{(e_1, e_2) = \big((e,-1,0), (1,0,-1)\big)}$

13. $D = \left\{f \in \mathcal{E} \;—\; \varphi(f) = -f\right\}$ La même méthode donne :

$f \in D \Leftrightarrow \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi(f) = -f \Leftrightarrow \theta \circ \psi(f) = \psi(-f) = -\psi(f)$ (ψ est linéaire).

Or $\theta(a,b,c) = -(a,b,c) \Leftrightarrow (a,b,-c) = (-a,-b,-c) \Leftrightarrow a = b = 0$.

Comme $\psi(f) = (f(0), f'(0), f(1))$ $\boxed{f \in D \Leftrightarrow f(0) = f'(0) = 0}$

$D = \mathrm{Ker}\,\left(\varphi + \mathrm{Id}\,\mathcal{E}\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

$$f = a\,p + b\,q + c\,r \in D \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll|l} a + b + c & = 0 & -1 \\ a + 2b & = 0 & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} b - c = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$$

$\boxed{D \text{ est la droite vectorielle d'équations } a = -2b = -2c, \quad \text{de base } e_3 = (2,-1,-1)}$

14. Nous avons $\dim \mathcal{E} = \dim P + \dim D$ donc $\mathcal{E} = P \oplus D \Leftrightarrow P \cap D = \{0\}$.

Montrons ceci : $f \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(f) = f \\ \varphi(f) = -f \end{cases} \Leftrightarrow f = 0$ $\boxed{\mathcal{E} = P \oplus D}$

15. Constituée des bases de deux espaces supplémentaires : $\boxed{\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathcal{E}}$

16. L'appartenance de ces vecteurs à P et D montre que $\varphi(e_1) = e_1, \varphi(e_2) = e_2, \varphi(e_3) = -e_3$, d'où la matrice de φ dans $\mathcal{C}$: $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\varphi \text{ est la symétrie vectorielle par rapport à } P \text{, de direction } D}$

Partie IV

$\mathcal{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ — } P(0) = 0\}$

17. L'application $P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire non nulle, définie sur $\mathbb{R}[X]$, de noyau $\mathcal{F}$, donc $\mathcal{F}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$: $\boxed{\mathcal{F} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$

   $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$ est le noyau de la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathcal{F}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, nous pouvons dire

   $\boxed{\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_n[X] \text{ de dimension } n}$

18. $(P_k)_{1\leqslant k\leqslant q} \in \mathcal{F}^q$ vérifie $\forall\, k \in [\![1, q-1]\!]$, $\lim_{x\to+\infty} \left(P_{k+1}(x) - P_k(x) = +\infty\right)$.

   Montrons que $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant q}$ est libre (où $f_k = \exp \circ p_k$).

   Dans le cas contraire, si $(a_1, a_2, \cdots, a_q) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ vérifie $\sum_{k=1}^n a_k\, f_k = 0$ (fonction nulle), alors, en posant $m = \max\{k \in [\![1, q]\!] \text{ — } a_k \neq 0\}$, nous avons :

   •si $m = 1$, alors $a_1 \neq 0$ et $a_1 f_1 = 0$ qui est impossible (f_1 n'est pas la fonction nulle)

   •si $m \geqslant 2$ alors $a_m \neq 0$ et $\sum_{k=1}^m a_k f_k = 0 \Rightarrow f_m = -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} f_k$.

   En divisant par f_m (qui ne s'annule pas), il vient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} \exp\left(P_k(x) - P_m(x)\right) = -1 \tag{1}$$

   Quand $x \to +\infty$, chaque "exponentielle" tend vers 0 puisque

$$P_k(x) - P_m(x) = \underbrace{P_k(x) - Pk+1(x)}_{\to -\infty} + \cdots + \underbrace{P_{m-1}(x) - P_m(x)}_{\to -\infty} \to -\infty$$

   En faisant tendre x vers $+\infty$ dans la formule (1) il vient $0 = -1$ ce qui est absurde. $\boxed{\text{Dans ces conditions : } (f_k)_{1\leqslant k\leqslant q} \text{ est libre}}$

Exercice 2
Partie I

1. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. On effectue une succession de k épreuves de Bernoulli indépendantes (tirages de boules dans l'urne), dont le succès (tirer la boule numéro i) a pour probabilité $\frac{1}{n}$, et X_i compte le nombre de succès.

   $\boxed{\text{On en déduit que } X_i \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (k, \tfrac{1}{n}).}$

   C'est-à-dire : $X_i(\Omega) = [\![1; k]\!]$ et pour tout $j \in X(\Omega)$:

$$P(X_i = j) = \binom{k}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^j \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-j}$$

2. D'après ce qui précède, on a, par exemple $P(X_1 = k) = P(X_2 = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^k$, donc $P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}$. Pourtant $P\Big((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\Big) = 0$ (sur k tirages, on ne peut pas tirer k fois la boule 1 et en même temps k fois la boule 2).

   Donc $P\Big((X_1 = k) \cap (X_2 = k)\Big) \neq P(X_1 = k)P(X_2 = k)$. Donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

   A fortiori, $\boxed{\text{les variables aléatoires } X_1, \ldots, X_n \text{ ne sont pas indépendantes}}$.

3.

4. La variable aléatoire $X_i + X_j$ compte le nombre de tirages où on tire la boule i ou la boule j. Elle compte donc le nombre de succès (tirer la boule i ou la boule j) à une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes (tirages de boules dans l'urne), dont le succès a pour probabilité $\frac{2}{n}$ (2 boules possibles, pour n boules dans l'urne).

   $\boxed{\text{On en déduit que } X_i + X_j \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (k, \tfrac{2}{n}).}$

Partie II

1. En faisant un seul tirage, on obtient forcément un seul numéro.

   Donc $\boxed{Z_1 \text{ est la variable aléatoire certaine égale à } 1}$. D'où $\boxed{E(Z_1) = 1}$.

   En faisant 2 tirages, on peut obtenir soit 2 numéros différents, soit 2 fois le même numéro. L'événement $Z_2 = 1$ signifie qu'au deuxième tirage, on retire la même boule qu'au premier tirage, ce qui a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ d'arriver. On a donc $P(Z_2 = 1) = \dfrac{1}{n}$.

   On a donc également $P(Z_2 = 2) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.

   On peut résumer dans un tableau :

i	1	2
$P(Z_2 = i)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n-1}{n}$

On a donc $E(Z_2) = \dfrac{1}{n} \times 1 + \dfrac{n-1}{n} \times 2$, i.e $\boxed{E(Z_2) = \dfrac{2n-1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n}}$.

2. (a) L'événement $Z_k = 1$ signifie qu'on tire k fois la même boule. Il y a n possibilités (soit on tire toujours la boule n° 1, soit toujours la boule n° 2, ... , soit toujours la boule n° n). Or, en tout, il y a n^k suites de tirages possibles (n possibilités pour chacun des k tirages). Comme il y a équiprobabilité, on en déduit :

$$\boxed{P(Z_k = 1) = \frac{n}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

Pour l'événement $Z_k = k$, on distingue deux cas :

— Si $k > n$, on ne peut obtenir au maximum que n résultats différents. Donc l'événement $Z_k = k$ est impossible :

$$\boxed{P(Z_k = k) = 0 \quad \text{si } k > n}$$

— Si $k \leqslant n$, on dénombre. L'événement $Z_k = k$ signifie qu'on a tiré des boules toutes différentes. Il y a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités pour cela. En effet, il y a n possibilités pour la première boule, puis $n-1$ pour la deuxième (qui doit être différente de la première), ... , puis $n-k+1$ pour la k-ième (qui doit être différente des $k-1$ premières). Ce qui fait en tout $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités. Et en tout, il y a toujours n^k suites de tirages possibles. D'où :

$$\boxed{P(Z_k = k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!} \quad \text{si } k \leqslant n}$$

(b) Soit $\ell \in [\![1; n]\!]$. L'événement $Z_{k+1} = \ell$ signifie qu'en faisant $k+1$ tirages, on obtient ℓ numéros différents. Et ceci peut se produire de deux manières différentes :

— Soit on avait déjà ℓ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un numéro qu'on avait déjà tiré précédemment.

— Soit on avait $\ell - 1$ numéros différents après k tirages, et on a tiré au $(k+1)$-ième tirage un des $n - (\ell - 1)$ numéros qu'on n'avait encore jamais tirés.

D'où :

$$\begin{aligned} P(Z_{k+1} = \ell) &= P_{Z_k=\ell}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell) + P_{Z_k=\ell-1}(Z_{k+1} = \ell)P(Z_k = \ell - 1) \\ &= \frac{\ell}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{n-(\ell-1)}{n}P(Z_k = \ell - 1) \end{aligned}$$

Ce qui donne bien :

$$\boxed{P(Z_{k+1} = \ell) = \frac{\ell}{n}P(Z_k = \ell) + \frac{n-\ell+1}{n}P(Z_k = \ell - 1)}$$

Partie III

1. On a vu au II.2.(a) que $P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{n^{k-1}}$. Donc ici $\boxed{P(Z_k = 1) = \dfrac{1}{4^{k-1}}}$.

En tirant des boules numérotées de 1 à 4 on ne pourra jamais obtenir strictement plus que 4 numéros différents. Donc $\boxed{P(Z_k \geqslant 5) = 0}$.

2. L'événement $Z_k = 2$ signifie qu'on tire exactement 2 numéros différents au cours des k tirages. On dénombre : il y a $\binom{4}{2} = 6$ paires de numéros possibles. Et une fois les 2 numéros fixées (appelons-les a et b), il y a $2^k - 2$ suites de tirages possibles où on tire exactement ces 2 numéros. En effet, il y a 2 possibilités pour chacun des k tirages (soit on tire le numéro a, soit le numéro b). Ce qui fait 2^k possibilités, auxquelles il faut en enlever 2 : « on tire uniquement le numéro a » et « on tire uniquement le numéro b » (sinon $Z_k = 1$). Comme le nombre total de possibilités est 4^k (4 possibilités à chacun des k tirages) :

$$\boxed{P(Z_k = 2) = 6\frac{2^k - 2}{4^k}}$$

Remarque : On pouvait aussi le faire sans dénombrement. En effet, d'après le II.2.(b), avec $\ell = 2$ et $n = 4$, on a $P(Z_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Z_k = 2) + \frac{3}{4}P(Z_k = 1)$, i.e $P(Z_{k+1} = 2) = \frac{1}{2}P(Z_k = 2) + \frac{3}{4^k}$ d'après la question précédente. Ceci permet alors de démontrer la formule par récurrence sur k.

3. (a) L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ signifie qu'au moins une des 4 boules n'est jamais tirée au cours des k premiers tirages, c'est-à-dire :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

D'après la formule du crible, on a donc :

$$\begin{aligned} P(Z_k \leqslant 3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) \\ - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) - P(A_2 \cap A_3) \\ - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{aligned}$$

Or, $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)$ car les boules jouent toutes le même rôle. De même, les probabilités des 6 intersections 2 à 2 sont égales, et les 4 probabilités d'intersections 3 à 3 aussi. Donc :

$$P(Z_k \leqslant 3)=4P(A_1)-6P(A_1\cap A_2)+4P(A_1\cap A_2\cap A_3)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)$$

Comme $P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=0$ (on est obligé de tirer au moins une des 4 boules), on a :

$$\boxed{P(Z_k \leqslant 3)=4P(A_1)-6P(A_1\cap A_2)+4P(A_1\cap A_2\cap A_3)}$$

(b) L'événement A_1 signifie qu'à chaque tirage, on tire la boule 2 ou la boule 3 ou la boule 4, ce qui fait 3^k suites de tirages possibles (3 possibilités pour chacun des k tirages). Comme il y a en tout 4^k suite de tirages possibles, on en déduit que $\boxed{P(A_1)=\dfrac{3^k}{4^k}}$.

De même, l'événement $A_1\cap A_2$ signifie qu'à chaque tirage, on tire la boule 3 ou la boule 4, ce qui fait 2^k suites de tirages possibles. D'où $\boxed{P(A_1\cap A_2)=\dfrac{2^k}{4^k}=\dfrac{1}{2^k}}$.

Enfin, l'événement $A_1\cap A_2\cap A_3$ signifie qu'on tire la boule numéro 4 à chaque tirage, ce qui fait 1 suite de tirages possibles.

D'où $\boxed{P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\dfrac{1}{4^k}}$

(c) D'après les deux questions précédentes, on a :

$$\boxed{P(Z_k \leqslant 3)=\frac{4\cdot 3^k-6\cdot 2^k+4}{4^k}}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}P(Z_k=3)&=P(Z_k\leqslant 3)-P(Z_k=2)-P(Z_k=1)\\&=\frac{4\cdot 3^k-6\cdot 2^k+4}{4^k}-6\frac{2^k-2}{4^k}-\frac{4}{4^k}\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{P(Z_k=3)=\frac{4\cdot 3^k-12\cdot 2^k+12}{4^k}=\frac{3^k-3\cdot 2^k+3}{4^{k-1}}}$$

Enfin, comme Z_k est toujours inférieur ou égal à 4, on a $P(Z_k=4)=1-P(Z_k\leqslant 3)$, ce qui donne :

$$\boxed{P(Z_k=4)=\frac{4^k-4\cdot 3^k+6\cdot 2^k-4}{4^k}}$$

Exercice 3

<u>Questions préliminaires</u> :

a) Si f appartient à F, $\psi(f)=f'$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $\psi(f)$ appartient à F. D'autre part, si f et g sont deux éléments de E, λ et μ sont deux réels,

$$\psi(\lambda f+\mu g)=(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g'=\lambda\,\psi(f)+\mu\,\psi(g).$$

$\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } F}$

b) Si h désigne l'application $x\mapsto 1$, on a $h\neq 0_F$ et $\psi(h)=0_F$.
Le noyau de ψ n'est donc pas réduit à 0_F. $\boxed{\psi \text{ n'est pas un automorphisme}}$

1. Soit f un élément de F. f appartient à E si et seulement si il existe quatre réels a,b,cd tels que $\forall\ x\,,\ f(x)=(a\,x+b)\,\sin x+(c\,x+d)\,\cos x$

Ceci est équivalent à $f=a\,f_1+b\,f_2+c\,f_3+d\,f_4$

c'est-à-dire $E=\mathrm{Vect}(f_1,f_2,f_3,f_4)$ donc $\boxed{E \text{ est un espace vectoriel}}$

dont $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est une famille génératrice.

Cette famille est également libre puisque, si $a\,f_1+b\,f_2+c\,f_3+d\,f_4=0$, alors, pour tout x, on a : $a\,\sin x+b\,x\,\sin x+c\,\cos x+d,x\,\cos x=0$.

En prenant $x=0$, on a $c=0$, puis $x=\pi$ donne $d=0$.

Ensuite $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=-\frac{\pi}{2}$ donnent $a+b\,\frac{\pi}{2}=0$ et $a-b\,\frac{\pi}{2}=0$ d'où $a=b=0$.

La famille $\mathcal{B}$ est donc libre et génératrice $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E}$

2. (a) D est linéaire et $D(f_1)=f_3$, $D(f_2)=f_1+f_4$, $D(f_3)=-f_1$ et $D(f_4)=f_3-f_2$.

Donc D est un endomorphisme de E et $\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(D)=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}}$

(b) $f = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 + d\,f_4$ appartient au noyau de D si et seulement si

$$\begin{cases} b-c=0 \\ -d=0 \\ a+d=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a=b=c=d=0 \quad \Leftrightarrow \quad f=0_E \qquad \boxed{\mathrm{Ker}\,(D)=\{0_E\}}$$

D est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie donc $\boxed{D \text{ est un isomorphisme de } E}$

Note : on pouvait également calculer le déterminant de la matrice.

3. (a) La matrice de $D^2 - \lambda\,\mathrm{Id}_E$ est $\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

Les opérations élémentaires ne changent pas le rang. Par exemple, $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $C_2 \leftrightarrow C_3$ transforment A en

$$A' = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Note : d'autres opérations élémentaires permettent de triangulariser la matrice A.

Ainsi, si $\lambda \neq -1$, le rang de A vaut 4

si $\lambda = -1$, alors $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ le rang de A est égal à 2.

Conclusion $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est } \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \neq 1 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}}$

(b) $\lambda = -1$. La matrice de $D^2 + \mathrm{Id}_E$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 2.

Ceci montre que :

- $\mathrm{Im}\,(f)$ est engendrée par $(2\,f_3, -2\,f_1)$, donc par (f_1, f_3) qui est libre
- $\dim\big(\mathrm{Im}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)\big) = 2$ (le rang)

  donc (f_1, f_3) est une base de $\mathrm{Im}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)$
- (f_1, f_3) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)$
- $\dim\big(\mathrm{Ker}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)\big) = 2$ (théorème du rang)

  donc (f_1, f_3) est une base de $\mathrm{Ker}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)$

Conclusion $\boxed{(f_1, f_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\,(D^2 + \mathrm{Id}_E)}$

(c) $h = D^2 + \mathrm{Id}_E$ vérifie donc $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Im}\,(h)$. Ainsi, pour tout vecteur $u \in E$ nous avons $h(u) \in \mathrm{Im}\,(h) = \mathrm{Ker}\,(h) \Rightarrow h\big(h(u)\big) = 0$ soit $h^2 = 0$.

Ceci se développe en $(D^2 + \mathrm{Id}_E) \circ (D^2 + \mathrm{Id}_E) = 0$ soit $\boxed{D^4 + 2\,D^2 + \mathrm{Id}_E = 0}$

(d) Il en résulte que $D \circ (D^3 + 2\,D) = (D^3 + 2\,D) \circ D = -\,\mathrm{Id}_E$

ce qui montre D est bijective et $\boxed{D^{-1} = -D^3 - 2\,D}$

4. Soit $V = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{Id}_E, D^2\right)$.

(a) Pour que V soit une sous-anneau de $\mathcal{L}(E)$ il faut et il suffit que V soit un sous-groupe $\mathcal{L}(E)$ (immédiat puisque V est un espace-vectoriel),

contenant Id_E (idem)

et stable pour $\circ$.

Composons deux éléments quelconques de V :

$$\begin{aligned} (a\ \mathrm{Id}_E + b\,D^2) \circ (a_1\ \mathrm{Id}_E + b_1\ D^2) &= aa_1\ \mathrm{Id}_E + (ab_1 + ba_1)D^2 + bb_1\,D^4 \\ &= aa_1\ \mathrm{Id}_E + (ab_1 + ba_1)D^2 + bb_1\,(-\,\mathrm{Id}_E - 2\,D^2) \\ &= (aa_1 - bb_1)\ \mathrm{Id}_E + (ab_1 + ba_1 - 2\,bb_1)D^2 \in V \end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{V \text{ est une sous-anneau de } \mathcal{L}(E)}$

Note : ce calcul montre également que cet anneau est commutatif.

(b) $f = a\ \mathrm{Id}_E + b\,D^2 \in V$ est inversible dans V <u>ssi</u> il existe $f_1 = a_1\,\mathrm{Id}_E + b_1 D^2 \in V$ tel que $f \circ f_1 = \mathrm{Id}_E$. Comme (Id_E, D^2) est une famille libre, ceci est équivalent à

$$\begin{cases} aa_1 - bb_1 &= 1 \\ ab_1 + ba_1 - 2\,bb_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} aa_1 - bb_1 &= 1 \\ ba_1 + (a - 2\,b)\,b_1 &= 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système linéaire est $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a-2b \end{vmatrix} = (a-b)^2$.

- Si $a \neq b$, le système de Cramer admet une solution (unique) : f est inversible
- Si $a = b$, le système $\begin{cases} aa_1 - ab_1 = 1 \\ aa_1 - a\,b_1 = 0 \end{cases}$ est incompatible : f non inversible.

Conclusion $\boxed{f = a\ \mathrm{Id}_E + b\,D^2 \text{ est inversible dans } V \ \underline{\text{ssi}}\ a \neq b}$

(c) Il est connu que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe (pour la deuxième loi) $\boxed{(G, \circ) \text{ est un groupe}}$

5. (a) $y'' + y$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ admet deux zéros complexes conjuguées $\pm i$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc $x \mapsto A \sin x + B \cos x$.

Les solutions de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $\boxed{A\, f_1 + B\, f_3\,,\ A, B \in \mathbb{R}}$

(b) f appartient à $\mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)$ équivaut à $f \in F$ et f solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F) = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)}$

(c) f appartient au noyau de $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2$ <u>ssi</u> $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)(f) \in \mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)$. D'après le résultat précédent, ceci est équivalent à l'existence de A et B réels tels que :

$$(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)(f) = A\, f_1 + B\, f_3$$

La matrice du **3-b** montre que $2\, f_3 = (\psi^2 + \mathrm{Id}_F)(f_2)$ et $-2\, f_1 = (\psi^2 + \mathrm{Id}_F)(f_4)$ donc $f \in \mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2$ si et seulement si il existe deux réels A et B tels que

$$\exists\, A, B \in \mathbb{R}\,,\ (\psi^2 + \mathrm{Id}_F)(f) = A\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)\Big(\frac{1}{2}\, f_2\Big) + B\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)\Big(-\frac{1}{2}\, f_4\Big)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, A, B \in \mathbb{R}\,,\quad (\psi^2 + \mathrm{Id}_F)\Big(f - \frac{A}{2}\, f_2 + \frac{B}{2}\, f_4\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists\, A, B \in \mathbb{R}\,,\ f - \frac{A}{2}\, f_2 + \frac{B}{2}\, f_4 \in \mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F) \quad \Big(= \mathrm{Vect}(f_1, f_3)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, A, B, C, D \in \mathbb{R}\,,\ f = \frac{A}{2}\, f_2 - \frac{B}{2}\, f_4 + C\, f_1 + D\, f_3$$

On en déduit que $\mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2 = \mathrm{Vect}\, f_1, f_2, f_3, f_4$, soit $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2 = E}$

Si y est solution de $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$, alors y est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$y^{(4)} = -2\, \underbrace{y^{(2)}}_{\in \mathcal{C}^1} - y$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$, donc y est de classe $\mathcal{C}^5$.

Par une récurrence évidente, on montrerait que $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ y \in \mathcal{C}^{(2n+1)}(\mathbb{R})$. Ainsi, les solutions de l'équation sont des éléments de F (de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)

De plus, pour tout f de F, $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2(f) = f^{(4)} + 2f^{(2)} + f$. On peut donc conclure que E est l'espace des solutions de l'équation différentielle $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$.

Conclusion $\boxed{E \text{ est l'ensemble des solutions de } y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0}$