Devoir Surveillé 07

Le vendredi 14 Mars 2025, 14h-18h pour une durée de 4h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le sujet comporte 4 pages.

Exercice 1
Espace vectoriel de fonctions

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère les fonctions :

$$f_0 : x \mapsto 1 f_1 : x \mapsto \sin(2x) f_2 : x \mapsto \cos(2x)$$

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x + d \right\}$

1. Démontrer que la famille $\mathcal{U} = (f_0, f_1, f_2)$ est libre.
2. Ecrire tout élément de E à l'aide des éléments de la famille $\mathcal{U}$.
3. Démontrer que E est un sous $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
4. Donner une base de E.

Espace vectoriel des complexes

Dans $\mathbb{C}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, soit E l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ia, a \in \mathbb{R}$ et soit F l'ensemble des nombres complexes de la forme $b - ib, b \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
2. Donner une base de E,F.
3. En déduire une base de $\mathbb{C}$.

Exercice 2
Fonction définie par une intégrale et solution d'une équa. diff.

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \qquad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x).$$

Partie I.

On note G et F les applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad G(x)=\int_0^x \mathrm{e}^t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad F(x)=\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x-1}\cdot$$

1. Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2 (On pourra utiliser le développement de Taylor de ϕ à l'ordre 1). En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x)=\varphi(0)+\dfrac{x}{2}\varphi'(0)+o(x)$.
   (b) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=0.$$

   Indication : On pourra remarquer que $(\mathcal{E}_0)$ est équivalente à $y'(x)+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}y(x)=0$.
4. Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. (a) Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.
6. La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?
7. On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que, pour tout x nombre réel strictement positif, on a $\varphi(x)\le F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x=0$?
   (b) Déduire du I. 7. a) que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Partie II.

On suppose dans la suite du problème que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad \varphi(x)=\mathrm{e}^{-x}.$$

1. (a) Déterminer explicitement $F(x)$.
   (b) Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (c) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.
2. On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.
   (a) Montrer que $\forall x\ge 4,\ x\le \mathrm{e}^{x/2}-1$ puis que $\forall x\ge 4,\ F(x)\le \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x/2}+1}\le \mathrm{e}^{-x/2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Partie III.

Dans cette partie, A désigne la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On admettra le résultat suivant :

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$$

1. Montrer que, pour tout t nombre réel et pour tout n entier naturel non nul, on a

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot$$

2. Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\int_0^{\pi} (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\cdot$$

3. On considère la fonction $g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in [0;\pi]\,, \quad g(t) = \frac{at+bt^2}{\sin(t/2)} \qquad \text{et} \qquad g(0) = 2a.$$

   (a) Montrer que la fonction g est continue sur $[0;\pi]$.
   (b) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0;\pi]$ et donner $g'(t)$ pour $t \in\,]0;\pi]$.
   (c) Vérifier que $g'(t)$ admet une limite finie quand t tend vers 0. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.

4. Montrer que, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, la suite

$$\int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$$

   tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

5. Déduire des questions précédentes que $A = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Exercice 3
Recherche des endomorphismes de $\{\mathbb{R}, +, \times\}$ (bornes sup et inf).

Soit f un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +, \times)$ [1].

1. Montrer que, si $f(1) = 0$ alors f est l'endomorphisme nul.
   Dans toute la suite, on suppose f non nul.
2. On se propose de déterminer l'image par f des nombres rationnels.
   (a) Justifier que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$.
   (b) Calculer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire :
   — $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$
   — $f\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
   — $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x^2)$ en fonction de $f(x)$.
   En déduire que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, puis que f est croissante.
4. Détermination de l'image d'un réel quelconque.
   Soit $u \in \mathbb{R}$, <u>u non rationnel</u>. On pose $A = \left\{x \in Q \;—\; x < u\right\}$ et $B = \left\{x \in \mathbb{Q} \;—\; u < x\right\}$.
   (a) Justifier que $u = \sup(A)$ et que $u = \inf(B)$.
   (b) Montrer que $\forall\, (x, y) \in A \times B,\ x \leqslant f(u) \leqslant y$.
   (c) en déduire que $f(u) = u$.

1. C'est-à-dire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x\,y) = f(x)\,f(y)$