Devoir Surveillé 07 - Eléments de Correction

Exercice 1
Espace vectoriel de fonctions

1. $\forall(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \lambda_0 f_0(x)+\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)=0$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_0+\lambda_2=0 \text{ en posant } x=0\\ \lambda_0+\lambda_1=0 \text{ en posant } x=\frac{\pi}{4}\\ \lambda_0-\lambda_2=0 \text{ en posant } x=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_0=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2=0\end{cases}$$
La famille $\mathcal{U}$ est libre.

2. $\forall f\in E,\ \exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x+d$
or $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ puis $2\sin x\cos x=\sin(2x)$ et $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
alors $f(x)=\dfrac{a}{2}+\dfrac{c}{2}+d+b\sin(2x)+\dfrac{a-c}{2}\cos(2x)$
Conclusion : $\boxed{\forall f\in E,\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\mid f=\left(\frac{a}{2}+\frac{c}{2}+d\right)f_0+bf_1+\frac{a-c}{2}f_2}$

3. Réciproquement soit g une combinaison linéaire de f_0,f_1,f_2.
$\exists(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^3,\ \forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\lambda_0+\lambda_1\sin(2x)+\lambda_2\cos(2x)=\lambda_0+2\lambda_1\sin x\cos x+\lambda_2(2\cos^2 x-1)$
qui est de la forme $a\cos^2 x+2b\sin x\cos x+c\sin^2 x+d$ avec $a=2\lambda_2, b=\lambda_1, c=0, d=\lambda_0-\lambda_2$
Conclusion : $\boxed{E=\mathrm{Vect}(f_0,f_1,f_2)}$

4. Comme de plus on a vu que la famille $\mathcal{U}$ est libre alors c'est une base de E.

Espace vectoriel des complexes

On peut identifier $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. $\forall z=x+iy\in\mathbb{C},\ \exists u=a+ia\in E,\ \exists v=b-ib\in F,\ z=u+v\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+b\\ y=a-b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{x+y}{2}\\ b=\frac{x-y}{2}\end{cases}$
L'unicité des réels a et b donne l'unicité de u et v.
Conclusion : $\forall z=x+iy\in\mathbb{C},\exists!u=\frac{x+y}{2}+i\frac{x+y}{2}\in E,\exists!v=\frac{x-y}{2}-i\frac{x-y}{2}\in F, z=u+v\Rightarrow\boxed{E\oplus F=\mathbb{C}}$

2. On peut écrire $a+ia=a(1+i)$ alors E est engendré par $1+i$ qui constitue une base de E.
On peut écrire $b-ib=b(1-i)$ alors F est engendré par $1-i$ qui constitue une base de F.

3. Une base de $\mathbb{C}$ est donc $(1+i,1-i)$

Exercice 2

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ donnée par $(1-\mathrm{e}^{-x})y'(x)+y(x)=\varphi(x)$.

Partie I.

On note G, F les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ G(x)=\int_0^x \mathrm{e}^t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F(x)=G(x)/(\mathrm{e}^x-1)$.

1. *Montrer que G et F sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

La fonction G est une primitive (celle qui s'annule en 0) de l'application continue $t\longmapsto\mathrm{e}^t\varphi(t)$, donc G est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. On a ainsi démontré que

$$\boxed{G \text{ et } F \text{ sont des applications de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

2. (a) *Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire que le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 est $F(x)=\varphi(0)+\dfrac{x}{2}\varphi'(0)+o(x)$.*

La fonction $t\longmapsto\mathrm{e}^t\varphi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de telles fonctions et admet donc, d'après le cours, un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par

$$\mathrm{e}^t\varphi(t)=\big(1+t+o(t)\big)\big(\varphi(0)+\varphi'(0)t+o(t)\big)=\varphi(0)+\big(\varphi(0)+\varphi'(0)\big)t+o(t).$$

En intégrant entre 0 et x (ce qui est possible d'après le cours), on obtient le développement limité à l'ordre 2 de la fonction G, ce qui prouve que

$$\boxed{\begin{array}{l}G \text{ admet un développement limité à l'ordre 2 en 0}\\ \text{donné par } G(x)=\varphi(0)x+\dfrac{\varphi(0)+\varphi'(0)}{2}x^2+o(x^2).\end{array}}$$

Pour obtenir le développement limité à l'ordre 1 de F en 0, on commence par rechercher un tel développement pour la fonction $x/(\mathrm{e}^x - 1)$. On a, d'après le cours,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

donc

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^2)} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o_{x\to 0}(x)} = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

où l'avant dernière égalité découle du développement limité de $1/(1+h)$ à l'ordre 2 en 0 donné par $1/(1+h) = 1 - h + o_{h\to 0}(h)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\forall x \geq 0, \qquad F(x) &= \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1} \\
&= \frac{\varphi(0)x + \big(\varphi(0) + \varphi'(0)\big)x^2/2 + o(x^2)}{\mathrm{e}^x - 1} \\
&= \Big(\varphi(0) + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2}x + o(x)\Big)\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \\
&= \Big(\varphi(0) + \frac{\varphi(0) + \varphi'(0)}{2}x + o(x)\Big)\Big(1 - \frac{x}{2} + o(x)\Big) \\
&= \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}x + o(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0} \\ \text{donné par } F(x) = \varphi(0) + \dfrac{\varphi'(0)}{2}x + o(x). \end{array}}$$

(b) *En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée. Préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.*

Le développement limité à l'ordre 1 de la fonction F que nous venons de déterminer permet d'affirmer que F admet en 0 une limite finie égale à $\varphi(0)$. On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } F(0) = \varphi(0).}$$

Pour $x > 0$, on a

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\Big(\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{2}x + (x) - \varphi(0)\Big) = \frac{\varphi'(0)}{2} + o(1),$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{\varphi'(0)}{2},$$

ce qui signifie que

$$\boxed{F \text{ est dérivable en 0 et } F'(0) = \frac{\varphi'(0)}{2}\cdot}$$

3. *Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_0) : (1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = 0$. Indication : On pourra remarquer que (E_0) est équivalente à $y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = 0$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \neq 0$, donc, sur $\mathbb{R}_+^*$, $(\mathcal{E}_0)$ est équivalente à $y'(x) + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}y(x) = 0$. D'après le cours, on sait que les solutions de l'équation de cette équation sont de la forme

$$\forall x > 0, \qquad y_h(x) = \lambda \exp\left\{ -\int^x \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u - 1}\mathrm{d}u \right\} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\ln|\mathrm{e}^x - 1|} = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^x - 1},$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad y(x) = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^x - 1} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).}$$

4. *Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

On sait déjà que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a

$$\forall x > 0, \qquad F'(x) = \frac{G'(x)}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^x\,\varphi(x)}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2},$$

donc

$$(1 - \mathrm{e}^{-x})F'(x) + F(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x})\Big(\frac{\mathrm{e}^x\,\varphi(x)}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{G(x)\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}\Big) + \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \varphi(x) - \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \varphi$$

Ainsi,

$$\boxed{F \text{ vérifie } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5. (a) *Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

D'après le cours, les solutions générales de $(\mathcal{E})$ s'obtiennent en ajoutant la solution particulière F de $(\mathcal{E})$ aux solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ déterminées à la question 3. Ainsi,

$$\boxed{\text{les solutions générales de } (\mathcal{E}) \text{ sont de la forme } \forall x > 0,\ y(x) = F(x) + \frac{\lambda}{\mathrm{e}^x - 1}\ (\lambda \in \mathbb{R})}$$

(b) *Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.*

Soit y une solution de $(\mathcal{E})$ donnée par $y(x) = F(x) + \dfrac{\lambda}{\mathrm{e}^x - 1}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \neq 0$, on a $\lim_{x\to 0^+} \lambda/(\mathrm{e}^x - 1) = \pm\infty$ (selon le signe de λ) et $\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = \varphi(0)$, donc $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \pm\infty$. Au contraire, lorsque $\lambda = 0$, on a $y = F$ donc y tend vers $\varphi(0)$ en 0. Ainsi,

$$\boxed{F \text{ est la seule solution de } (\mathcal{E}) \text{ qui admette une limite finie en } 0^+ \text{ égale à } \varphi(0).}$$

6. *La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$?*

On sait déjà que F est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour savoir si c'est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$, il faut regarder si la relation $(1 - \mathrm{e}^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x)$ est vérifiée en 0 pour $y = F$. Or, d'après la question 2. b),

$$(1 - \mathrm{e}^{-0})F'(0) + F(0) = (1 - 1)\frac{\varphi'(0)}{2} + \varphi(0) = \varphi(0),$$

donc

$$\boxed{F \text{ est une solution de } (\mathcal{E}) \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

7. *On suppose, dans cette question, que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

(a) *Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\varphi(x) \leq F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x = 0$?*

Soit $x > 0$. L'application φ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall t \in [0; x]$, $\varphi(t) \geq \varphi(x)$ et donc $\forall t \in [0; x]$, $\mathrm{e}^t \varphi(t) \geq \mathrm{e}^t \varphi(x)$ puisqu'une exponentielle est toujours positive. Combinée avec la croissance de l'intégrale, cette inégalité implique que

$$\int_0^x \mathrm{e}^t \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^x \mathrm{e}^t \varphi(x)\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$G(x) \geq \varphi(x) \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \varphi(x)(\mathrm{e}^x - 1),$$

ou encore

$$\frac{G(x)}{\mathrm{e}^x - 1} \geq \varphi(x).$$

Donc

$$\boxed{\forall x > 0, \qquad F(x) \geq \varphi(x).}$$

Cette relation reste vraie en $x = 0$ puisque F et φ coïncide en 0. Donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \qquad F(x) \geq \varphi(x).}$$

(b) *Déduire du I. 7. a) que F est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

On sait que F est une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geq 0,\ (1 - \mathrm{e}^{-x})F'(x) + F(x) = \varphi(x)$. Or, d'après la question précédente, on a $\forall x \geq 0,\ F(x) > \varphi(x)$, donc $\forall x \geq 0,\ (1 - \mathrm{e}^{-x})F'(x) \leq 0$, ce qui implique que $\forall x \geq 0,\ F'(x) \leq 0$ puisque $\forall x \geq 0,\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \geq 0$. Par suite,

$$\boxed{F \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

Partie II.

On suppose dans la suite du problème que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

1. (a) *Déterminer explicitement $F(x)$.*

Pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} \int_0^x \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

En 0, on a $F(0) = \varphi(0) = 1$. Donc

$$\boxed{\forall x \geq 0, \qquad F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}}$$

(b) *Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.*

On a

$$\mathrm{e}^x - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0^+}(x^2)\right) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0^+}(x^2),$$

donc, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + o_{x\to 0^+}(x^2)} = \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + o_{x\to 0^+}(x^2)}$$

ce qui donne

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o_{x\to 0^+}(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_{x\to 0^+}(x^2)$$

donc

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_{x\to 0^+}(x^2).}$$

(c) *Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}_+$.*

Pour compléter l'étude de F, il reste à regarder son comportement asymptotique en $+\infty$. Or, d'après le théorème des croissances comparées, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de F et la représenter graphiquement

2. *On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}_+$ et s'annulant en 0.*

(a) *Montrer que $\forall x \geq 4,\ x \leq \mathrm{e}^{x/2} - 1$ puis que $\forall x \geq 4,\ F(x) \leq 1/(\mathrm{e}^{x/2} + 1) \leq \mathrm{e}^{-x/2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.*

Considérons la fonction $g(x) = \mathrm{e}^{x/2} - x - 1$ définie sur $[4; +\infty[$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[4; +\infty[$ d'après les théorèmes généraux. On a $\forall x \geq 4,\ g'(x) = \mathrm{e}^{x/2}/2 - 1$ et $g''(x) = \mathrm{e}^{x/2}/4 \geq 0$. Par suite, g' est croissante. Or $g'(4) = \mathrm{e}^2/2 - 1 \geq 0$, donc $\forall x \geq 4,\ g'(x) \geq 0$ ce qui implique que g est croissante sur $[4; +\infty[$. Comme $g(4) = \mathrm{e}^2 - 5 \geq 0$, on en déduit que g est positive sur $[4; +\infty[$ et donc que

$$\boxed{\forall x \geq 4, \qquad x \leq \mathrm{e}^{x/2} - 1.}$$

Par conséquent, pour tout $x \geq 4$, on a

$$F(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \leq \frac{\mathrm{e}^{x/2} - 1}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{\mathrm{e}^{x/2} - 1}{(\mathrm{e}^{x/2} - 1)(\mathrm{e}^{x/2} + 1)} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2} + 1} \leq \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}} = \mathrm{e}^{-x/2},$$

donc

$$\boxed{\forall x \geq 4, \qquad F(x) \leq \mathrm{e}^{-x/2}.}$$

Comme Φ est la primitive de F qui s'annule en 0, on peut écrire que

$$\Phi(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui prouve immédiatement que Φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ puisque c'est l'intégrale de la fonction F qui est positive (positivité de l'intégrale). Par ailleurs, Φ étant continue sur le segment $[0; 4]$, elle est bornée sur ce segment par une constante $M_1 \geq 0$, d'après un résultat du cours (théorème des bornes). Lorsque $x \geq 4$, on écrit que

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x F(t)\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_4^x \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x/2} - \mathrm{e}^{-2} \\
&\leq \underbrace{\int_0^4 F(t)\,\mathrm{d}t + 1}_{=M_2}.
\end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on obtient que $\forall x \geq 0,\ 0 \leq \Phi(x) \leq \max\{M_1; M_2\}$, ce qui démontre bien que

$$\boxed{\Phi \text{ est une fonction bornée sur } \mathbb{R}_+.}$$

(b) *Étudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.*

La fonction Φ est bien évidemment dérivable puisque c'est une primitive et l'on a $\forall x \geq 0,\ \Phi'(x) = F(x) > 0$. Cela prouve que

$$\boxed{\Phi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

La fonction Φ étant croissante et bornée, on peut affirmer, en vertu du théorème de la limite monotone, que

$$\boxed{\Phi(x) \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers } +\infty.}$$

Partie III.

Dans cette partie, A désigne la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On admettra que $A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 1/k^2$.

1. *Montrer que, pour tout t nombre réel et pour tout n entier naturel non nul, on a*

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons la relation par récurrence sur $n \geq 1$ (on peut également utiliser les nombres complexes mais cela oblige à mettre à part les cas où $t = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$).

Initialisation : Pour $n = 1$, la relation est vérifiée puisque

$$\sin\left(\frac{2\times 1+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

en vertu de la formule $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons la relation vérifiée au rang n et démontrons la au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)+\cos\big((n+1)t\big)\big)\\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big)\\
&= \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big) \qquad \text{par hyp. de réc.}
\end{aligned}$$

Or, comme $2\sin a\cos b = \sin(a+b)+\sin(a-b)$, on a

$$2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\big((n+1)t\big) = \sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right),$$

donc

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)+\cos\big((n+1)t\big)\big)\\
&= \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\\
&= \sin\left(\frac{2n+3}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right),
\end{aligned}$$

ce qui prouve la relation au rang $n+1$.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on peut affirmer que

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\quad \forall n\geq 1,\qquad 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\big(\cos(t)+\cdots+\cos(nt)\big) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right).}$$

2. *Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \geq 1$, $\displaystyle\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}$.*

Soient $k \geq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$. En intégrant deux fois par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \underbrace{\left[(at+bt^2)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi}_{=0\ (\text{car } \sin(k\pi)=0)} - \int_0^\pi (a+2bt)\frac{\sin(kt)}{k}\mathrm{d}t\\
&= -\left[(a+2bt)\frac{-\cos(kt)}{k^2}\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2b\frac{-\cos(kt)}{k^2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2} - 2b\underbrace{\left[\frac{\sin(kt)}{k^3}\right]_0^\pi}_{=0}\\
&= \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2}.
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\left(\forall k\geq 1,\quad \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}\right) &\iff \left(\forall k\geq 1,\quad \frac{(-1)^k(a+2b\pi)-a}{k^2} = \frac{1}{k^2}\right)\\
&\iff \begin{cases} a+2b\pi = 0\\ -a = 1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a = -1\\ b = \dfrac{1}{2\pi}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{avec } a=-1 \text{ et } b = \frac{1}{2\pi}, \text{ on a } \forall k\geq 1,\ \int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.}$$

3. *On considère la fonction $g : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0;\pi]$, $g(t) = \dfrac{at+bt^2}{\sin(t/2)}$ et $g(0) = 2a$.*

(a) *Montrer que la fonction g est continue sur $[0;\pi]$.*

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi]$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. En particulier, g est continue sur $]0;\pi]$. Reste à étudier la continuité en 0. On a

$$at + bt^2 \underset{0^+}{\sim} at \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{2},$$

donc

$$g(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{at}{t/2} = 2a = g(0),$$

ce qui prouve la continuité de g en 0. En définitive,

$$\boxed{g \text{ est continue sur } [0;\pi].}$$

(b) *Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0;\pi]$ et donner $g'(t)$ pour $t \in]0;\pi]$.*

Nous venons de justifier que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;\pi]$ donc

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0;\pi].}$$

Pour tout $t \in]0;\pi]$, on a

$$g'(t) = \frac{(a+2bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)(1/2)\cos(t/2)}{\big(\sin(t/2)\big)^2},$$

donc

$$\boxed{\forall t \in]0;\pi]\,, \qquad g'(t) = \frac{(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2)}{2\big(\sin(t/2)\big)^2}\cdot}$$

(c) *Vérifier que $g'(t)$ admet une limite finie quand t tend vers 0. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$.*

On a

$$\begin{aligned}
&(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2)\\
&= (2a+4bt)\Big(\frac{t}{2} + o_{t\to 0^+}(t^2)\Big) - (at+bt^2)\Big(1 + o_{t\to 0^+}(t)\Big)\\
&= bt^2 + o_{t\to 0^+}(t^2),
\end{aligned}$$

donc

$$(2a+4bt)\sin(t/2) - (at+bt^2)\cos(t/2) \underset{0^+}{\sim} bt^2.$$

Par ailleurs, on a

$$2\big(\sin(t/2)\big)^2 \underset{0^+}{\sim} \frac{t^2}{2}\cdot$$

Par suite, on a

$$g'(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{bt^2}{t^2/2} \underset{0^+}{\sim} 2b,$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{t\longrightarrow 0^+} g'(t) = 2b.}$$

La fonction g étant continue sur $[0;\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\pi]$ et admettant une limite finie (égale à $2b$) en 0, on peut affirmer, en vertu du théorème de la limite de la dérivée, que

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0;\pi] \text{ et } g'(0) = 2b = \frac{1}{\pi}\cdot}$$

4. *Montrer que, pour toute fonction h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$, la suite $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

Soit $h \in \mathcal{C}^1([0;\pi];\mathbb{R})$. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t &= \left[h(t)\frac{-\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi h'(t)\frac{-\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t\\
&= \frac{h(0)}{n+1/2} + \int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^\pi |h'(t)|\frac{\big|\cos\big((n+1/2)t\big)\big|}{n+1/2}\mathrm{d}t \qquad \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leq \frac{\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t}{n+1/2} \qquad \text{car } \big|\cos\big((n+1/2)t\big)\big| \leq 1,
\end{aligned}$$

donc, puisque $\dfrac{\int_0^\pi |h'(t)|\,\mathrm{d}t}{n+1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi h'(t)\frac{\cos\big((n+1/2)t\big)}{n+1/2}\mathrm{d}t = 0.$$

Par ailleurs, on a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{h(0)}{n+1/2} = 0.$$
En combinant ces résultats, on obtient finalement que
$$\boxed{\int_0^\pi h(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

5. *Déduire des questions précédentes que* $A = \dfrac{\pi^2}{6}\cdot$

Soit $n \geq 1$. On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (bt^2+at)\cos(kt)\,\mathrm{d}t && \text{d'après III. 2.}\\ &= \int_0^\pi (bt^2+at)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,\mathrm{d}t && \text{par linéarité de l'intégrale.}\end{aligned}$$
Or, d'après la question III. 1., on a
$$\forall t \in \left]0;\pi\right], \qquad \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)} - \frac{1}{2}$$
donc, pour tout $t \in \left]0;\pi\right]$
$$\begin{aligned}(bt^2+at)\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \frac{(bt^2+at)\sin\big((n+1/2)t\big)}{2\sin(t/2)} - \frac{bt^2+at}{2}\\ &= \frac{1}{2}g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) - \frac{bt^2+at}{2}\end{aligned}$$
et l'on constate que cette relation est encore vraie en 0. Par suite, il vient
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^\pi (bt^2+at)\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_0^\pi (bt^2+at)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{bt^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^\pi = \frac{b\pi^3}{3}+\frac{a\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{3},$$
donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Comme g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi]$ d'après la question III. 3. c), on peut utiliser le résultat de la question III. 4. pour affirmer que
$$\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
donc
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6},$$
c'est-à-dire
$$\boxed{A = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

Exercice 3

1. Si un endomorphisme f de $\mathbb{R}$ vérifie $f(1)=0$, alors
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x) = f(1.x) = f(1)\,f(x) = 0 \qquad \boxed{f(1)=0 \Rightarrow f=\mathbf{0}}$$
Dans la suite : $f \neq \mathbf{0}$ donc $f(1)\neq 0$

2. (a) f étant un morphisme de groupes : $\boxed{\text{f(0)=0}}$

On retrouve ceci avec $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0) \Rightarrow f(0)=0$

De même : $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\,f(1) \Rightarrow \big(f(1)\big)^2 - f(1) = 0 \Rightarrow f(1)\in\{0,1\}$

Comme $f(1)\neq 0$, il reste $\boxed{f(1)=1}$

Enfin : $f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=1+1=2$ $\boxed{f(2)=2}$

(b) Nous venons d'amorcer une récurrence : Montrons l'hérédité :
$\forall\, n\in\mathbb{N},\ f(n)=n \Rightarrow f(n+1)=f(n)+f(1)=n+1$
$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ f(n)=n}$

(c) — Si n est un entier négatif, alors $-n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(-n)=-n$.
Comme $0=f(0)=f(n-n)=f(n)+f(-n)$,
il vient $f(n)=-f(-n)=-(-n)$ $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{Z},\ f(n)=n}$

— $\forall\ n\ \in\ \mathbb{N}^*\ :\ 1 = f(1) = f(n\,\frac{1}{n}) = f(n)\,f(\frac{1}{n}) = n\,f(\frac{1}{n})$
$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ f(\tfrac{1}{n})=\tfrac{1}{n}}$

— Tout rationnel x s'écrit $x = \frac{n}{m}$ avec $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

On en déduit $f(x) = f(n\,\frac{1}{m}) = f(n)\,f(\frac{1}{m}) = n\,\frac{1}{m} = x$ $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{Q}\,,\ f(x) = x}$

3. Tout réel x vérifie $f(x \cdot x) = f(x)\,f(x)$ $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\quad f(x^2) = \big(f(x)\big)^2}$

   Comme tout réel positif x peut se mettre sous la forme $x = t^2$,

   nous avons $f(x) = f(t^2) = \big(f(t)\big)^2 \geqslant 0$ $\boxed{f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+}$

   Enfin : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\,,\ x < y$, en posant $y - x = h > 0$

   il vient $y = x + h \Rightarrow f(y) = f(x) + \underbrace{f(h)}_{\geqslant 0} \geqslant f(x)$ $\boxed{f \text{ est croissante}}$

4. $u \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $\quad A = \big\{x \in Q \;—\; x < u\big\}$ et $B = \big\{x \in \mathbb{Q} \;—\; u < x\big\}$.

   (a) La définition de A montre que u est un majorant de A.

   C'est le plus petit majorant de A puis que, pour tout réel $t < u$, il existe un rationnel x vérifiant $t < x < u$ ($\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). $\boxed{u = \sup(A)}$

   Un raisonnement très proche montrerait que $\boxed{u = \inf(B)}$

   (b) Pour tout couple $(x, y) \in A \times B$ nous avons $x \leqslant u \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(u) \leqslant f(y)$ (f est croissante) soit, puisque x et y sont rationnels $\boxed{x \leqslant f(u) \leqslant y}$

   (c) Finalement : $\left\{\begin{matrix} f(u) \text{ majore } A & \Rightarrow u = \sup(A) \leqslant f(u) \\ f(u) \text{ minore } B & \Rightarrow f(u) \leqslant \inf(B) = u \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(u) = u$ (antisymétrie)

   f est donc l'application identique $\boxed{\forall\, u \in \mathbb{R}\,,\ f(u) = u}$