Devoir Maison 17

Pour le lundi 5 mai 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

1. Citer le théorème du rang.
2. Donner la définition d'un hyperplan.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   Déterminer le noyau et l'image de l'application
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_n[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto P(0) \end{aligned}$$
4. Soit $P = X^7 - 1$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7}$

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère l'endomorphisme f défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, t) = (3x + y - z - 3t, 2x + 2y - z - 3t, 2x + y - 3t, 2x + y - z + mt)$$

1. Vérifier que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$
2. Déterminer le rang de f suivant les valeurs du réel m.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$.
4. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   Dans la suite on pose $m = -2$
5. Déterminer $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f)$.
6. Que peut-on en déduire concernant $\mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(f)$?
7. Justifier que $\mathrm{Ker}\,(f - Id_{\mathbb{R}^4})$ est un hyperplan.
8. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (3; 2; 2; 2)$ $v_2 = (0; 4; 1; 1)$ $v_3 = (0; 0; 3; -1)$ $v_4 = (1; 1; 1; 1)$
   Démontrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et ecrire la matrice de f dans cette base.