Devoir Maison 17 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. *Théorème du rang :* soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

   alors $\text{rg}(f) + \dim(\text{Ker}\,(f)) = \dim E$

2. *Définition d'un hyperplan :* soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Un hyperplan H est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

3. *Déterminer le noyau et l'image de l'application* $\begin{array}{l} \phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ \qquad P \mapsto \widetilde{P}(0) \end{array}$

   $\phi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}$ et $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X], \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

   $\phi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda \widetilde{P + \mu Q})(0) = \lambda \widetilde{P}(0) + \mu \widetilde{Q}(0) = \lambda \phi(P) + \mu \phi(Q)$

   ainsi ϕ est une forme linéaire, elle n'est pas l'appllication nulle, donc son noyau est un hyperplan.

   $P \in \text{Ker}\ \phi \Leftrightarrow \phi(P) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{P}(0) = 0$

   donc $\boxed{\text{Ker}\ \phi = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \widetilde{P}(0) = 0\} = \text{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)}$

   D'après le théorème du rang, $\dim \text{Im}\ \phi = 1$ or $\text{Im}\ \phi \subset \mathbb{R}$ alors $\boxed{\text{Im}\ \phi = \mathbb{R}}$

4. *Soit $P = X^6 - 1$. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire* $\displaystyle\prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7}$

   Les racines de P sont les racines septièmes de l'unité, i.e $\{e^{\frac{2ik\pi}{7}}, k \in [\![0; 6]\!]\}$ donc $\boxed{P = \displaystyle\prod_{k=0}^{6} (X - e^{\frac{2ik\pi}{7}})}$

   Par ailleurs $1 - X^7 = (1 - X) \displaystyle\sum_{k=0}^{6} X^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{6} X^k = \prod_{k=1}^{6} (X - e^{\frac{2ik\pi}{7}})$

   En remplaçant X par 1 il vient : $7 = \displaystyle\prod_{k=1}^{6} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{7}}) = \prod_{k=1}^{6} e^{\frac{ik\pi}{7}} (-2i \sin \frac{k\pi}{7}) = 2^6 i^6 \prod_{k=1}^{6} e^{\frac{ik\pi}{7}} \prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7}$

   or $\displaystyle\prod_{k=1}^{6} e^{\frac{ik\pi}{7}} = e^{i\frac{\pi}{7}\sum_{k=1}^{6} k} = -1$ donc $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{6} \sin \frac{k\pi}{7} = \frac{7}{64}}$

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^4$ on considère l'endomorphisme f défini par $\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(x, y, z, t) = (3x + y - z - 3t, 2x + 2y - z - 3t, 2x + y - 3t, 2x + y - z + mt)$$

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

   $f(e_1) = (3, 2, 2, 2)$ $f(e_2) = (1, 2, 1, 1)$ $f(e_3) = (-1, -1, 0, -1)$ $f(e_4) = (-3, -3, -3, m)$ donc

   la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & m \end{pmatrix}}$

2. $\text{rg}(\varphi) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & m+2 \end{pmatrix} =$

   $\text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & 4m+9 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 12m+24 \end{pmatrix}$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } m = -2 \text{ alors } \text{rg}(f) = 3 \text{ sinon } \text{rg}(f) = 4}$

3. On pose $u_1 = (3, 2, 2, 2)$ $u_2 = (0, 4, 1, 1)$ $u_3 = (0, 0, 3, -1)$ $u_4 = (0, 0, 0, m+2)$.
   - Si $m = -2$, la famille (u_1, u_2, u_3) est libre, génératrice de $\text{Im}\ \varphi$ d'après le calcul précédent donc

     forme une base de $\text{Im}\ \varphi$.

     D'après le théorème du rang , $\dim \text{Im}\ \varphi + \dim \text{Ker}\ \varphi = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \text{Ker}\ \varphi = 1$

     $u = (x, y, z, t) \in \text{Ker}\ \varphi \Leftrightarrow \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + 2y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

     $\begin{cases} 2x + y - z - 2t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = t$

     donc $\boxed{\text{Ker}\ \varphi = \text{Vect}((1, 1, 1, 1))}$ dans la suite on pose $u_5 = (1, 1, 1, 1)$

- Si $m \neq -2$, la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre, génératrice de Im φ d'après le calcul précédent donc forme une base de Im φ.

  D'après le théorème du rang , $\dim \mathrm{Im}\ \varphi + \dim \mathrm{Ker}\ \varphi = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 0$ alors $\boxed{\mathrm{Ker}\ \varphi = \{(0,0,0,0)\}}$

4. - Si $m \neq -2$ alors $\mathrm{Ker}\ \varphi = \{(0,0,0,0)\} \Rightarrow$ f est injective. Or $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ alors il y a équivalence avec

     f est surjective et donc f est bijective.
   - Si $m = -2$ alors $\mathrm{Ker}\ \varphi \neq \{(0,0,0,0)\} \Rightarrow$ f n'est pas injective. Or $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ alors il y a équivalence avec

     f n'est pas surjective et donc f n'est pas bijective.

5. *Dans la suite on pose* $m = -2$

$$u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) \Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, u = av_1 + bv_2 + cv_3 = dv_5$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 3a = d \\ 2a + 4b = d \\ 2a + b + 3c = d \\ 2a + b - c = d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} a = \frac{d}{3} \\ b = \frac{d}{12} \\ c = \frac{d}{12} \\ c = \frac{-d}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{(0,0,0,0\}}$.

6. D'après la formule de Grassmann, $\dim(\mathrm{Im}\ f + \dim \mathrm{Ker}\ f) = 4 = \dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) - \dim(\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f) = 4 = \dim \mathbb{R}^4$ or $\mathrm{Im}\ f + \dim \mathrm{Ker}\ f \subset \mathbb{R}^4$ donc $\mathrm{Im}\ f + \dim \mathrm{Ker}\ f = \mathbb{R}^4$.

   Comme $\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(f) = \{(0,0,0,0\}$ alors $\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \text{ et } \mathrm{Ker}\,(f) \text{ sont supplémentaires}}$.

7. $u = (x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}\,(f - Id) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + y - z - 3t = 0$

   On trouve donc l'équation d'un hyperplan.

   Concusion : $\boxed{\mathrm{Ker}\,(f - Id_{\mathbb{R}^4}) \text{ est un hyperplan}}$.

8. Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec $v_1 = (3;2;2;2)$ $v_2 = (0;4;1;1)$ $v_3 = (0;0;3;-1)$ $v_4 = (1;1;1;1)$

   on retrouve les vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 définis précédemment. Or ils forment une base de $\mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f$ donc de $\mathbb{R}^4$ d'après la question précédente. Ainsi $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et ecrire la matrice de f dans cette base.

   De plus en effectuant les calculs $f(v_1) = v_1$ $f(v_2) = v_2$ $f(v_3) = v_3$ puis $f(v_4) = v_4$ car $v_4 \in \mathrm{Ker}\ f$

   Ainsi $\boxed{M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$