Devoir Maison 16

Vacances de printemps : révisions

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k -ième tirage.

Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.
 (b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
 (c) Montrer que :

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
 (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
- (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k + 1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\ll \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \gg.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

4. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
- (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
5. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Exercice 2

Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note I_n l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que ℓ a cette valeur

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et expliciter la dérivée de f à droite en 0.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que, dans l'intervalle I_n , l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n .
4. Déterminer un équivalent *très simple* de x_n , lorsque n tend vers l'infini.
5. Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle I_0 , puis dans les intervalles I_{2n-1} et I_{2n} , pour $n \geq 1$.
6. Déterminer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

7. Justifier l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$$

8. Quel est le signe de u_n ?
9. Montrez que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.
10. Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$?
11. Montrer que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).
12. Justifier l'encadrement $0 \leq \mu \leq \pi$.
13. Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

On

Partie III

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

Il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$, mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n -ème de g , notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X .

14. Expliciter $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Il existe deux polynômes P_n et Q_n , tels que, pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x) \sin^{(n)}(x) + Q_n(x) \sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

15. Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs. Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?
16. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n .

Il résulte donc des questions 15 et 16 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. Montrer que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.
18. Utilisez les formules établies à la question 16 pour expliciter P_3 et Q_3 .
19. Deux polynômes U et V vérifient $U(x) \sin x + V(x) \cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrer que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.
20. En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1} .
21. Justifiez alors la relation $P'_n = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.
22. Il est clair que l'application $\Phi : T \rightarrow T + T''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrer que Φ induit un automorphisme Φ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus ; montrer ensuite que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.

23. $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum_{k=0}^p a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassées de tout signe Π .
24. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

Exercice 3

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

Partie -I- Étude d'une symétrie

On notera bien, que dans cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}$ -algèbre.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on pose : $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$.

1. (a) Montrer que σ est une symétrie du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 (b) Établir que (I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.
2. On considère A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 (a) Montrer que : $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.
 (b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = (ad - bc)I$.
 (c) Montrer que si A est inversible alors $\sigma(A)$ l'est aussi.
 Exprimer les matrices $\sigma(A)^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A .
3. (a) Vérifier que τ est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 (b) Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Exprimer $\sigma(A)$ à l'aide des matrices A, I et du complexe $\tau(A)$.

Partie -II- Une $\mathbb{R}$ -algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

On notera bien, que dans toute cette partie, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est muni de sa structure de $\mathbb{R}$ -algèbre.

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$.

On désigne par H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $M(z_1, z_2)$, le couple (z_1, z_2) décrivant $\mathbb{C}^2$.

4. (a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.
 (b) En déduire que H est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
 Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .
 (c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.
 (d) Montrer que H est une $\mathbb{R}$ -algèbre. La $\mathbb{R}$ -algèbre H est-elle commutative?
5. (a) Vérifier que : $\forall A \in H, \sigma(A) \in H$ et $\text{Det}(A) \in \mathbb{R}^+$.
 (b) Montrer qu'une matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H .
 (c) Vérifier que $(H \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
6. Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels alors il en est de même de leur produit.

Partie -III- Un produit scalaire et une projection orthogonale

Pour A et B dans H on pose : $(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$

7. On considère A et B dans H .

(a) Prouver que $(A | B) \in \mathbb{R}$. On pourra utiliser les questions **2-a** et **5-a**.

(b) Montrer que $(A | A) = \text{Det}(A)$.

(c) (Pourra être fait après le chapitre Espaces Euclidiens) Établir que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H .

8. (Pourra être fait après le chapitre Espaces Euclidiens) Vérifier que (I, J, K, L) est une base orthonormale de H .

9. On pose $F = \{A \in H \mid \tau(A) = 0\}$.

(a) Montrer que F est un hyperplan du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel H . En donner une base.

(b) (Pourra être fait après le chapitre Espaces Euclidiens) Montrer que : $F^\perp = \{\alpha I \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) (Pourra être fait après le chapitre Espaces Euclidiens) On désigne par π la projection orthogonale sur F .

Montrer que : $\forall A \in H, \pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$.