

Devoir Maison 16 - Eléments de Correction

Exercice 1

Partie A

1. Chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, la variable X_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Et donc : $\mathbb{E}(X_k) = \frac{n+1}{2}$.

2. (a) Si la première boule tirée est la boule numéro n , on a $T_n = 1$.
Comme $S_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{X_i}_{\geq 1} \geq n$, la variable T_n ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à n .

Enfin, toute valeur intermédiaire est possible : si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors la suite de tirages

$$\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(k-1) \text{ premiers tirages}}, \overbrace{(n-k+1)}^{k\text{-ème tirage}} \quad (\text{par exemple})$$

donne $T_n = k$ (puisque $S_{k-1} = k-1 < n$ et $S_k = n$).

(b) La seule possibilité pour avoir $S_1 \geq n$ est de tirer la boule numéro n au premier tirage (et on aura alors en fait $S_1 = n$) :

$$(T_n = 1) = (X_1 = n).$$

Puisque X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

(c) L'événement $(T_n = n)$ est égal à :

$$\begin{aligned} (S_{n-1} \leq n-1) \cap (S_n \geq n) &= \underbrace{\left(\underbrace{\overbrace{X_1 + \dots + X_{n-1}}^{\geq n-1}}_{\substack{\geq 1 \\ \text{donc égalité partout}}} \leq n-1 \right)}_{\substack{\geq 1 \\ \text{donc égalité partout}}} \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (S_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_1 + \dots + X_n \geq n) \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \cap \underbrace{(X_n \geq 1)}_{\text{toujours vrai}} \\ &= (X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 1) \end{aligned}$$

Par indépendance de $X_1, \dots, X_{n-1}$ (les tirages sont avec remise) :

$$\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

3. D'après la question 2 :

$$T_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad ; \quad \mathbb{P}(T_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(T_2 = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = \frac{1}{2}.$$

4. D'après la question 2 :

$$T_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad ; \quad \mathbb{P}(T_3 = 1) = \frac{1}{3} \quad ; \quad \mathbb{P}(T_3 = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-1} = \frac{1}{9}.$$

Et par conséquent :

$$\mathbb{P}(T_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Calculons l'espérance de T_3 :

$$\mathbb{E}(T_3) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{1}{9} = \frac{16}{9}.$$

Partie B

1. Comme déjà précisé en partie A pour S_n et S_{n-1} , la variable S_k vaut au minimum k et ceci se produit lorsque les k premiers tirages ont donné la boule numéro 1. Elle vaut au maximum $n \times k$, situation qui se produit lorsque l'on tire k fois la boule numéro n .

Ceci prouve l'inclusion :

$$S_k(\Omega) \subset \llbracket k, nk \rrbracket.$$

On peut supposer que le correcteur se contentera de cette réponse, l'égalité étant un peu difficile à prouver. On peut par exemple procéder par récurrence sur $k \geq 1$ pour prouver l'inclusion réciproque : $\forall k \geq 1, \llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$.

— Initialisation : Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si le premier tirage donne la boule numéro i , alors $S_1 = X_1 = i$; donc : $\llbracket 1, n \rrbracket \subset S_1(\Omega)$.

— Hérédité : Supposons pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ fixé que $\llbracket k, nk \rrbracket \subset S_k(\Omega)$ et prouvons que $\llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket \subset S_{k+1}(\Omega)$. Soit $i \in \llbracket k+1, n(k+1) \rrbracket$:

— Si $i \leq kn$, alors $i-1 \in \llbracket k, nk \rrbracket$, donc par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = i-1$.

La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, 1$ donne $S_{k+1} = i$.

- Si $i \geq kn + 1$, alors, par hypothèse de récurrence, il existe une suite de k tirages $x_1, \dots, x_k$ telle que $S_k = x_1 + \dots + x_k = kn$.
La suite de $(k+1)$ tirages $x_1, \dots, x_k, i - kn$ (on a bien $1 \leq i - kn \leq n$ car $kn + 1 \leq i \leq kn + n$) donne $S_{k+1} = x_1 + \dots + x_k + i - kn = nk + i - kn = i$.

2. (a) On a immédiatement :

$$S_{k+1} = X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}.$$

(b) Soit $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{(S_k = j)\}_{j \in \llbracket k, nk \rrbracket}$ donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k+1} = i) &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}((S_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}((S_k + X_{k+1} = i) \cap (S_k = j)) \\ &= \sum_{j=k}^{nk} \mathbb{P}((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j)) \end{aligned}$$

L'événement $(X_{k+1} = i - j)$ étant impossible si $i - j \notin \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut ne conserver dans cette somme que les termes tels que $1 \leq i - j \leq n$, c'est-à-dire (la deuxième des inégalités précédentes étant réalisée car $i \leq n$) tels que $j \leq i - 1$, les autres termes étant nuls. Puisque $i - 1 \leq nk$ (car $i \leq n$ et $k \geq 1$), on a :

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}((X_{k+1} = i - j) \cap (S_k = j))$$

Enfin, les variables $X_1, \dots, X_k, X_{k+1}$ étant indépendantes, on obtient l'indépendance des deux variables $S_k = X_1 + \dots + X_k$ et X_{k+1} .
D'où avec la question 1. (X_{k+1} suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \sum_{j=k}^{i-1} \underbrace{\mathbb{P}(X_{k+1} = i - j)}_{=\frac{1}{n}} \times \mathbb{P}(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$$

3. (a) La formule du triangle de Pascal s'écrit, pour $k, j \in \mathbb{N}^*$:

$$\binom{j-1}{k-1} + \binom{j-1}{k} = \binom{j}{k}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Prouvons par récurrence sur i que :

$$\forall i \geq k+1, \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- Initialisation : pour $i = k+1$, la somme ne comporte qu'un seul terme : $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$.
— Hérédité : Supposons, pour un entier $i \geq k+1$ fixé que $\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$ et prouvons la formule pour $i+1$:

$$\sum_{j=k}^{(i+1)-1} \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^i \binom{j-1}{k-1} = \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} + \binom{i-1}{k-1} = \dots$$

Par hypothèse de récurrence et avec la formule de Pascal :

$$\dots = \binom{i-1}{k} + \binom{i-1}{k-1} = \binom{i}{k} = \binom{(i+1)-1}{k}.$$

La formule est ainsi prouvée pour $i+1$.

(c) — Initialisation : $\mathcal{H}_1$ s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(S_1 = i) = \frac{1}{n} \underbrace{\binom{i-1}{0}}_{=1} = \frac{1}{n}.$$

Comme $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ d'après la question 1., ceci est vrai.

- Hérédité : Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour un entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ fixé.
Soit $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$. D'après 6.(b) et par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \frac{1}{n^k} \binom{j-1}{k-1} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1}$$

Et donc, d'après la question 7.(b) :

$$\mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{k} = \frac{1}{n^{k+1}} \binom{i-1}{(k+1)-1}.$$

On a ainsi prouvé $\mathcal{H}_{k+1}$.

4. (a) L'événement $(T_n > k)$ signifie que la somme des numéros des boules obtenues est pour la première fois supérieure ou égale à n lors du tirage numéro ℓ avec $\ell > k$, autrement dit que lors du tirage numéro k , la somme des numéros des boules obtenues est *strictement* inférieure (négation de « supérieure ou égale ») à n , c'est-à-dire $(S_k < n) = (S_k \leq n-1)$:

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1).$$

(b) En écrivant, avec une union d'événements incompatibles :

$$(T_n > k) = (S_k \leq n-1) = \bigcup_{i=1}^{n-1} (S_k = i)$$

on obtient, avec 7.(c) puis 7.(b) :

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(S_k = i) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

5. La variable aléatoire T_n ($T_n(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$) étant finie, elle admet en effet une espérance et :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n = k).$$

En écrivant, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T_n) &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(T_n > k-1) - \mathbb{P}(T_n > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n (\textcolor{blue}{k-1} + \textcolor{red}{1}) \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(\textcolor{blue}{k-1})}_{\substack{=0 \\ \text{pour } k=1}} \mathbb{P}(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^n \textcolor{red}{1} \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k-1) \mathbb{P}(T_n > k-1) + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_n > k-1) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k) \end{aligned}$$

Avec le changement d'indice $\ell = k-1$ dans les deux premières sommes :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell \mathbb{P}(T_n > \ell) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > \ell) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > \ell).$$

Avec la question 8.(b), on a donc :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k}_{\text{par la formule du binôme de Newton}} \times 1^{(n-1)-k} = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^{n-1}$$

6. On va déterminer la limite de $\mathbb{E}(T_n)$ en écrivant l'expression trouvée ci-dessus sous « forme exponentielle » :

$$\mathbb{E}(T_n) = \exp\left((n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right)\right)$$

Avec l'équivalent classique $\ln(1+u_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ lorsque u est une suite qui converge vers 0 (ici $u_n = 1/n$ tend vers 0) :

$$(n-1) \ln\left(\frac{1}{n} + 1\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n-1) \times \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\mathbb{E}(T_n) \longrightarrow_{n \rightarrow +\infty} \exp(1) = e.$$

Exercice 2 Conseils

Partie II

9) On justifiera que $|u_n| = \int_0^\pi \frac{|\sin t|}{t} dt$, puis on utilisera le changement de variable $t = s + n\pi$. Il sera alors possible d'étudier le signe de $|u_{n+1}| - |u_n|$, et de majorer $|u_n|$.

10) On exprimera $F(2(n+1)\pi) - F(2n\pi)$ en fonction de $|u_{2n+1}|$ et $|u_{2n}|$ afin d'exploiter le résultat précédent.

11) et 12) Utiliser la conclusion de la question 10).

13) Mathématiquement classique mais plus délicate. Il vaut mieux chercher les points de la partie suivante.

partie III (Il faut traiter cette partie qui est indépendante)

16) Utiliser le lien évident entre $\sin^{(n+2)}$ et $\sin^{(n)}$.

17) Montrer toutes les propriétés en une seule récurrence.

19) U et V ont beaucoup de zéros évidents.

- 20) Suivre l'énoncé puis exploiter le résultat précédent.
- 22) Il y a plusieurs points à démontrer (lesquels?). On justifiera que Φ conserve le degré pour montrer l'injection de Φ (et de Φ_n). Le reste en découle.
- 23) P_n est solution de $\mathcal{E}_n$. On la cherchera sous la forme $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ (par identification).

Correction

Partie I

1. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Par suite, avec $\ell = 1$, f est continue à droite en 0

2. Les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

Au voisinage de 0 : $f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \right) = -\frac{x}{3} + o(x)$

Par conséquent, $\left. \begin{array}{l} f \text{ continue sur } [0, +\infty[\\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\\ \lim_{0^+} f' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[\\ f'(0) = 0 \end{array} \right\}$

3. Soit $\varphi : x \mapsto x \cos x - \sin x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = -x \sin x$.

Sur $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$, φ est continue et strictement monotone donc établit une bijection de I_n dans $\varphi(I_n)$ qui est un intervalle.

Or $\varphi(n\pi)\varphi((n+1)\pi) = -n(n+1)\pi^2 < 0$ montre que $0 \in \varphi(I_n)$ (c'est une valeur intermédiaire). il existe un unique réel x_n dans I_n tel que $\varphi(x_n) = 0$

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $n\pi \leq x_n \leq n\pi + \pi$ d'où $1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Le théorème des pincements prouve alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi} = 1$ donc

$$x_n \sim n\pi$$

5. Pour tout x , $f'(x)$ est du signe de $\varphi(x)$.

— sur I_0 : φ est décroissante et $\varphi(0) = 0$. Donc f est décroissante sur I_0

— sur I_{2n} avec $n \geq 1$: φ est décroissante et s'annule en x_{2n} .

Donc sur I_{2n} ($n \geq 1$)

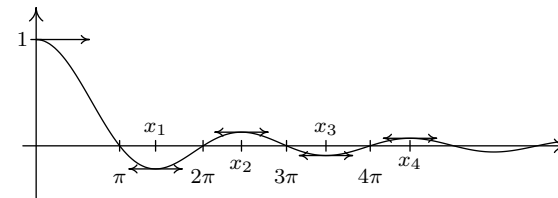
x	$2n\pi$	x_{2n}	$(2n+1)\pi$
f	0	$\nearrow$	0

— sur I_{2n+1} avec $n \in \mathbb{N}$: φ est croissante et s'annule en x_{2n+1} .

Donc sur I_{2n+1}

x	$(2n+1)\pi$	x_{2n+1}	$(2n+2)\pi$
f	0	$\searrow$	0

6. La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisse $n\pi$, avec n entier $n \geq 1$.



Partie II

7. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc admet des primitives sur cet intervalle :

F est la primitive qui s'annule en 0

8. Pour tout entier n nous avons $n\pi < (n+1)\pi$. De plus :

— $\forall t \in I_{2n} : f(t) \geq 0$

donc

$$u_{2n} \geq 0$$

— $\forall t \in I_{2n+1} : f(t) \leq 0$

donc

$$u_{2n+1} \leq 0$$

9. Pour tout n , f garde un signe constant sur I_n . Par suite, $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ ce qui donne en faisant le changement de variable $t = s + n\pi$: $|u_n| = \int_0^\pi \frac{|\sin s|}{s + n\pi} ds$.

Ainsi $|u_{n+1}| - |u_n| = -\pi \int_0^\pi \frac{|\sin s|}{(s+n\pi)(s+(n+1)\pi)} ds \leq 0$. ($|u_n|$) est décroissante

De plus : $\forall n \geq 1, |u_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi |\sin s| ds$. Par pincements :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$$

10. Pour tout entier n nous avons :

— $F((2n+2)\pi) - F(2n\pi)$

$$= (F((2n+2)\pi) - F((2n+1)\pi)) + (F((2n+1)\pi) - F(2n\pi))$$

$$= u_{2n+1} + u_{2n} = -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| \geq 0 \quad \text{d'après la question précédente.}$$

— De même $F((2n+3)\pi) - F((2n+1)\pi) = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$.

— Enfin : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (F(2n\pi) - F((2n+1)\pi)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 0$.

Les suites $(F(2n\pi))$ et $(F((2n+1)\pi))$ sont adjacentes

11. Il en résulte que $(F(2n\pi))$ et $(F((2n+1)\pi))$ convergent vers une même limite μ .

Cela implique que

$(F(n\pi))$ converge vers μ

12. De plus, pour tout entier n on a : $F(2n\pi) \leq \mu \leq F((2n+1)\pi)$

ce qui donne pour $n = 0$: $\underbrace{F(0)}_{=0} \leq \mu \leq F(\pi)$.

Comme f est décroissante sur $[0, \pi]$, on a : $F(\pi) = \int_0^\pi f(t) dt \leq \int_0^\pi \underbrace{f(0)}_{=1} dt \leq \pi$.

Finalement

$$0 \leq \mu \leq \pi$$

13. L'idée est d'encadrer $x > \pi$ par deux multiples consécutifs de π :

$$n\pi \leq x < (n+1)\pi \Leftrightarrow n \leq \frac{x}{\pi} < n+1 \Leftrightarrow n = E\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

En notant n_x cette partie entière, on a donc $n_x \pi \leq x \leq n_x \pi + \pi$ et

$$|F(x) - F(n_x \pi)| \leq \int_{n_x \pi}^x \frac{|\sin t|}{t} dt \leq \frac{1}{n_x \pi} \int_{n_x \pi}^{(n_x+1)\pi} |\sin t| dt \leq \frac{1}{n_x \pi} \int_0^\pi |\sin t| dt$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} n_x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} |F(x) - F(n_x \pi)| = 0$, et compte-tenu de la limite de la suite $(F(n\pi))$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \mu$$

Partie III

14. Le calcul donne

$$g''(x) = - \frac{x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}$$

15. On obtient immédiatement

$$\begin{array}{lll} P_0 = 1 & P_1 = X & P_2 = X^2 - 2 \\ Q_0 = 0 & Q_1 = 1 & Q_2 = 2X \end{array}$$

16. En dérivant la relation donnée par l'énoncé, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \frac{P'_n(x) \sin^{(n)}(x) + P_n(x) \sin^{(n+1)}(x) + Q'_n(x) \sin^{(n+1)}(x) + Q_n(x) \sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+1}} \\ &\quad - (n+1) \frac{P_n(x) \sin^{(n)}(x) + Q_n(x) \sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

comme $\sin^{(n)}(x) = -\sin^{(n+2)}(x)$, on obtient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x) \sin^{(n+1)}(x) + Q_{n+1}(x) \sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}$$

avec

$$\begin{array}{l} P_{n+1}(X) = X P'_n(X) + X Q'_n(X) - (n+1) Q_n(X) \\ Q_{n+1}(X) = X Q_n(X) - X P'_n(X) + (n+1) P_n(X) \end{array}$$

17. Soit $\mathcal{H}_n$ la propriété : " P_n de degré n de coefficient dominant 1,

Q_n de degré $n-1$ de coefficient dominant n ,

P_n et Q_n à coefficients entiers "

• $\mathcal{H}_1$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

• Alors P_n, Q_n, P'_n et Q'_n sont à coefficients entiers donc P_{n+1} et Q_{n+1} aussi.

De plus $X P_n$ est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1 et $X Q'_n$ et Q_n sont de degré strictement inférieur à $n+1$ donc P_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 1.

Enfin $X Q_n, X P'_n$ et $(n+1)P_n$ sont de degré n de coefficients dominants respectifs n, n et $n+1$ donc Q_{n+1} est degré n de coefficient dominant $n+1$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On démontre de manière analogue que pour tout entier p , P_{2p} est pair et Q_{2p} est

impair et P_{2p+1} est impair et Q_{2p+1} est pair.

$$\begin{array}{l} P_n \text{ a la parité de } n \\ Q_n \text{ a la parité de } n+1 \end{array}$$

18. On a $P_3 = X P_2 + X Q'_2 - 3 Q_2$ soit

$$P_3 = X^3 - 6X$$

et $Q_3 = X Q_2 - X P'_2 + 3 P_2$ soit

$$Q_3 = 3X^2 - 6$$

19. Puisque, pour tout $x > 0$, on a $U(x) \sin(x) + V(x) \cos(x) = 0$:

— pour tout entier $k \neq 0$, avec $x = 2k\pi$: $\forall k \in \mathbb{N}^*, V(2k\pi) = 0$

— pour tout entier $k \neq 0$, avec $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: $\forall k \in \mathbb{N}^*, U\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$

U et V admettent une infinité de racines donc $U = V = 0$ (polynôme nul)

20. En dérivant $n+1$ fois l'égalité $xg(x) = \sin x$, on obtient pour tout $x > 0$,

$$xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$

d'où en reportant les formules donnant $g^{(n)}(x)$ et $g^{(n+1)}(x)$:

$$\left(P_{n+1}(x) + (n+1)Q_n(x) - x^{n+1}\right) \sin^{(n+1)}(x) + \left((n+1)P_n(x) - Q_{n+1}(x)\right) \sin^{(n)}(x) = 0$$

Puisque, à n fixé, l'une des expressions $\sin^{(n+1)}(x)$ ou $\sin^{(n)}(x)$ vaut $\pm \sin(x)$ tandis que l'autre vaut $\pm \cos(x)$, on peut appliquer le résultat de la question précédente et on a donc :

$$P_{n+1}(X) + (n+1)Q_n(X) = X^{n+1} \quad (n+1)P_n(X) - Q_{n+1}(X) = 0$$

21. En reportant $Q_{n+1}(X) = (n+1)P_n(X)$ dans la définition de Q_{n+1} (question 16), on a $X(Q_n(X) - P'_n(X)) = 0$, ce qui donne (par intégrité) $Q_n(X) = P'_n(X)$

Des formules $P_{n+1}(X) + (n+1)Q_n(X) = X^{n+1}$ (question 20)

$P_{n+1}(X) = X P_n(X) + X Q'_n(X) - (n+1)Q_n(X)$ (question 16)

on tire l'égalité suivante

$$X^{n+1} - (n+1)Q_n(X) = X P_n(X) + X Q'_n(X) - (n+1)Q_n(X)$$

$$\Leftrightarrow X^n = P_n(X) + Q'_n(X) \quad (\text{par régularité})$$

dans laquelle $Q_n = P'_n \Rightarrow Q'_n = P''_n$. P_n est solution de $\mathcal{E}_n : y'' + y = x^n$

22. L'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est visiblement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Si T est un polynôme non nul, alors $T + T''$ est un polynôme de même degré (somme de deux polynômes de degrés différents). Ceci montre que :

- Φ induit un endomorphisme Φ_n sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- Φ est injective (donc Φ_n aussi) car $T \neq 0 \Rightarrow \Phi(T) \neq 0$ d'où $\text{Ker } \Phi = \{0\}$
- Donc Φ_n est bijective (endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie).

CONCLUSION

Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Nous savons déjà que Φ est injective.

Elle est également surjective puisque, si Q est un polynôme quelconque, il existe un entier n tel que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme Φ_n est bijective, Q admet un antécédent P par Φ_n . P est un antécédent de Q par Φ . Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$

23. Cherchons $P_n = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ qui soit solution de $\mathcal{E}_n$. On a

$$\begin{aligned} P_n + P''_n &= \sum_{k=0}^n b_k X^k + \sum_{k=2}^n k(k-1) b_k X^{k-2} \\ &= \sum_{k=0}^n b_k X^k + \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) b_{k+2} X^k \\ &= b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (b_k + (k+2)(k+1) b_{k+2}) X^k = X^n \end{aligned}$$

Par suite $b_n = 1$, $b_{n-1} = 0$ et pour tout $k \leq n-2$, $b_k = -(k+2)(k+1) b_{k+2}$.

- Cela donne : $b_n = 1$, $b_{n-2} = -n(n-1)$, $b_{n-4} = n(n-1)(n-2)(n-3)$,
et, par une récurrence évidente : $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad b_{n-2k} = (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!}$
- et de même : $b_{n-1} = 0$, $b_{n-3} = 0$ et, dans les mêmes conditions : $b_{n-2k+1} = 0$.

Finalement, avec $p = E\left(\frac{n}{2}\right)$

$$P = \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!} X^{n-2k}$$

24. Les équations différentielles $\mathcal{E}_n$ sont linéaires. Les solutions sont la somme d'une solution particulière de cette équation (P_n en est une), et de la solution générale de $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique $t^2 + 1 = 0$ admet $\pm i$ pour solutions, d'où les solutions de $\mathcal{E}_n$

$$x \mapsto P_n(x) + A \cos(x) + B \sin(x), \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 3 Partie -I-

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\sigma(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ et $\tau(A) = a + d$ (la trace)

1. $\sigma : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est visiblement linéaire et involutive :

— son expression analytique dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est $\begin{cases} a' = d \\ b' = -b \\ c' = -c \\ d' = a \end{cases}$

— $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$

σ est une symétrie

Nous savons que $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel¹ de dimension 4. Pour montrer que (I, J, K, L) en est une base, il suffit de montrer que cette famille est libre.

SI $\sigma I + \beta J + \gamma K + \delta L = 0$ (matrice nulle), alors

$$\begin{pmatrix} \alpha - i\delta & -\beta + i\gamma \\ \beta + i\gamma & \alpha + i\delta \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - i\delta = 0 \\ \alpha + i\delta = 0 \\ -\beta + i\gamma = 0 \\ \beta + i\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

(I, J, K, L) est une base du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

1. Attention : dans la partie II, cet ensemble est considéré comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Il est alors de dimension 8.

Pour obtenir la matrice de σ relativement à cette base, il suffit d'en calculer les images. On obtient immédiatement $\sigma(I) = I$, $\sigma(J) = J$, $\sigma(K) = -K$, $\sigma(L) = -L$

donc la matrice de σ relativement à (I, J, K, L) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(a) Vérifions que $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$ par un calcul matriciel :

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ nous avons

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(AB) = \begin{pmatrix} cb' + dd' & -ab' - bd' \\ -ca' - dc' & aa' + bc' \end{pmatrix}$$

$$\sigma(A)\sigma(B) = \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb' + dd' & -ab' - bd' \\ -ca' - dc' & aa' + bc' \end{pmatrix}$$

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$$

(b) Avec les mêmes notations, calculons le produit $A\sigma(A)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad A\sigma(A) = \text{Det}(A) I$$

(c) Si A est inversible, alors il existe une matrice inverse B telle que $AB = I$ (voir 2).

Comme $\sigma(I) = I$, en utilisant le résultat de la question 2-a il vient

$$\sigma(AB) = \sigma(I) \Rightarrow \sigma(B)\sigma(A) = I \Rightarrow \sigma(B) = (\sigma(A))^{-1}$$

$$A \text{ inversible} \Rightarrow \sigma(A) \text{ inversible et } \sigma(A^{-1}) = (\sigma(A))^{-1}$$

3. (a) La linéarité de $\tau : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow a + d$ est immédiate.

$\tau : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ est donc bien une forme linéaire du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

(b) Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ nous avons

$$A + \sigma(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : \sigma(A) = -A + \tau(A) I$$

Partie -II-

$$M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \{M(z_1, z_2) \mid (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\}$$

4. (a) En notant $z_1 = x_1 + i y_1$, $z_2 = x_2 + i y_2$, $(x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + i y_1 & -x_2 + i y_2 \\ x_2 + i y_2 & x_1 - i y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= x_1 I + x_2 J - y_1 L + y_2 K \end{aligned}$$

d'où l'existence de la décomposition indiquée.

L'unicité de cette décomposition vient du fait que la famille (I, J, K, L) est libre³ dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En effet, nous savons déjà que, pour tous complexes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Cette implication est donc forcément vraie quand α, β, γ et δ sont réels.

$$\forall M \in H, \exists! (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 \quad M = \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$$

(b) Nous avons donc $H \subset \text{Vect}(I, J, K, L)$ (espace vectoriel engendré par cette famille).

Pour obtenir l'égalité, il suffit de vérifier que I, J, K et L appartiennent à H , ce qui est vrai puisque $I = M(1, 0)$, $J = M(0, -1)$, $K = M(0, i)$ et $L = M(-i, 0)$.

$$H \text{ est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ de dimension 4, de base } (I, J, K, L)$$

(c) On peut vérifier la stabilité par un calcul direct (qui se révèle assez rapide) :

$$\begin{aligned} M(z_1, z_2) M(z'_1, z'_2) &= \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'_1 & -\overline{z'_2} \\ z'_2 & \overline{z'_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2 & -(z_1 \overline{z'_2} + \overline{z_2} \overline{z'_1}) \\ z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2 & -z_2 \overline{z'_2} + \overline{z_1} \overline{z'_1} \end{pmatrix} = M(z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2) \end{aligned}$$

2. On rappelle que pour les matrices il est inutile de vérifier qu'on a $AB = BA = I$

3. Mais ce n'est pas une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ qui est de dimension 8.

H est stable pour le produit matriciel

On pouvait également se contenter de vérifier que les produits deux à deux des matrices I, J, K, L sont des éléments de H . On dresse alors la table de multiplication suivante :

*	I	J	K	L
I	I	J	K	L
J	J	$-I$	L	$-K$
K	K	$-L$	$-I$	J
L	L	K	$-J$	$-I$

(d) Montrons que H est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$ -algèbre $M_2(\mathbb{C})$.

H est déjà un sous-espace vectoriel, stable pour le produit.

Il reste à vérifier que l'élément unité I appartient à H , ce qui est évident.

Enfin, la table précédente montre que $JK \neq KJ$.

H est une $\mathbb{R}$ -algèbre non commutative

5. (a) si $A = M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix} \in H$ alors $\sigma(A) = \begin{pmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} = M(\overline{z_1}, -z_2)$

et $\text{Det}(A) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = \underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2}_{\in \mathbb{R}^+}$ $\forall A \in H, \sigma(A) \in H$ et $\text{Det}(A) \in \mathbb{R}^+$

(b) Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. D'après le calcul précédent, le déterminant de toute matrice $A = M(z_1, z_2) \in H$ n'est nul que si $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 0$, soit si $z_1 = z_2 = 0$, c'est-à-dire si $A = M(0, 0) = \mathbf{0}$.

toute matrice non nulle de H est inversible

D'après l'égalité $A\sigma(A) = \text{Det}(A)I$, nous avons $A\left(\frac{1}{\text{Det}(A)}\sigma(A)\right) = I$

donc

$$\mathbf{0} \neq A \in H \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)}\sigma(A)$$

(c) H est stable pour le produit matriciel et $M_2(\mathbb{C})$ étant intègre, nous avons

$A \neq \mathbf{0}$ et $B \neq \mathbf{0} \Rightarrow AB \neq \mathbf{0}$ ce qui prouve que $H \setminus \{\mathbf{0}\}$ est stable pour le produit.

De plus la matrice unité I est un élément de $H \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Enfin, la question précédente prouve que tout élément de $H \setminus \{\mathbf{0}\}$ admet un inverse dans $H \setminus \{\mathbf{0}\}$ d'où

$(H \setminus \mathbf{0}, \times)$ est un groupe

6. Soit deux entiers naturels sommes de quatre carrés :

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2, p' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2, a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{N}$$

$$\text{En remarquant que } \begin{cases} p = |a + ib|^2 + |c + id|^2 = \text{Det} \left(M(\underbrace{a + ib}_{=z_1}, \underbrace{c + id}_{=z_2}) \right) \\ p' = |a' + ib'|^2 + |c' + id'|^2 = \text{Det} \left(M(\underbrace{a' + ib'}_{=z'_1}, \underbrace{c' + id'}_{=z'_2}) \right) \end{cases}$$

nous avons

$$\begin{aligned} pq &= \text{Det} \left(M(z_1, z_2) \right) \text{Det} \left(M(z'_1, z'_2) \right) = \text{Det} \left(M(z_1, z_2) M(z'_1, z'_2) \right) \\ &= \text{Det} \left(M(z_1 z'_1 - \overline{z_2} z'_2, z_2 z'_1 + \overline{z_1} z'_2) \right) = \text{Det} \left(M(Z_1, Z_2) \right) \end{aligned}$$

où $Z_1 = A + iB$ et $Z_2 = C + iD$ avec $A, B, C, D \in \mathbb{Z}$.

Ainsi : $pq = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2$ est somme de quatre carrés d'entiers naturels

d'où la propriété annoncée

Partie -III-

$$(A | B) = \frac{1}{4} \tau(A\sigma(B) + B\sigma(A))$$

Remarque : dans la suite, nous utiliserons la propriété $\tau(I) = 2$ et $\tau(\lambda I) = 2\lambda$.

7. (a) A et B appartiennent à H donc $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ aussi. De plus, σ est involutive et vérifie **2-b** donc nous avons $\sigma(A\sigma(B)) = \sigma(\sigma(B))\sigma(A) = B\sigma(A)$.

Ainsi, en notant $M = A\sigma(B)$ nous avons :

$$(A | B) = \frac{1}{4} \tau(M + \sigma(M)) = \frac{1}{4} \tau(\tau(M)I) = \frac{1}{2} \tau(M)$$

Or, $M = M(z_1, z_2) \in H$ donc $\tau(M) = z_1 + \overline{z_1} \in \mathbb{R}$

$(A | B) \in \mathbb{R}$

(b) En utilisant le calcul précédent, nous avons

$$(A | A) = \frac{1}{2} \tau(A\sigma(A)) = \frac{1}{2} \tau(\text{Det}(A)I) = \text{Det}(A)$$

$$(A | A) = \text{Det}(A)$$

(c) L'application $(A, B) \mapsto (A | B)$ est une application de H^2 vers $\mathbb{R}$.

- Elle est symétrique (puisque $A\sigma(B) + B\sigma(A) = B\sigma(A) + A\sigma(B)$).
- La linéarité par rapport à A découle de la linéarité de τ et de σ :

$$\begin{aligned}
(A + \lambda A' | B) &= \frac{1}{4} \tau \left((A + \lambda A') \sigma(B) + \underbrace{\sigma(A + \lambda A')}_{=\sigma(A) + \lambda \sigma(A')} B \right) \\
&= \frac{1}{4} \tau \left(A \sigma(B) + \lambda A' \sigma(B) + \sigma(A) B + \lambda \sigma(A') B \right) \\
&= \frac{1}{4} \tau \left(A \sigma(B) + \sigma(A) B \right) + \frac{1}{4} \tau \left(\lambda A' \sigma(B) + \lambda \sigma(A') B \right) \\
&= (A | B) + \lambda (A' | B)
\end{aligned}$$

La symétrie donne la linéarité par rapport à B .

— Nous avons vu que $(A | A) = \text{Det}(A)$ et si $A \in H$, $\text{Det}(A) \in \mathbb{R}^+$ donc $\text{Det}(A, A) \geq 0$.

— Enfin, avec les mêmes notations :

$$(A | A) = 0 \Rightarrow \text{Det}(A) = 0 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 = 0 \Rightarrow A = \mathbf{0}$$

$(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur H

8. (I, J, K, L) est une base de H . Pour vérifier qu'elle est orthonormée, il suffit de calculer les quatre carrés scalaires et les 6 produits scalaires. On peut utiliser la table de multiplication précédente (avec $\sigma(I) = I$, $\sigma(J) = -J$, $\sigma(K) = -K$ et $\sigma(L) = -L$).

$$\begin{aligned}
(I | I) &= \frac{1}{4} \tau(I + I) = 1 \quad \text{et} \quad (J | J) = \frac{1}{4} \tau(-2J^2) = \frac{1}{4} \tau(2I) = 1 \\
(K | K) &= \frac{1}{4} \tau(-2K^2) = \frac{1}{4} \tau(2I) = 1 \quad \text{et} \quad (L | L) = \frac{1}{4} \tau(-2L^2) = \frac{1}{4} \tau(2I) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(I | J) &= \frac{1}{4} \tau(I(-J) + IJ) = \frac{1}{4} \tau(\mathbf{0}) = 0, \text{ et de même} \\
(I | K) &= (I | L) = (J | K) = (J | L) = (K | L) = 0
\end{aligned}$$

(I, J, K, L) est une base orthonormée de H

$$9. F = \{A \in H \mid \tau(A) = 0\}$$

(a) τ étant une forme linéaire non nulle sur H , son noyau est un hyperplan de H .

CONCLUSION

F est un hyperplan de H

Caractérisons les matrices de F :

$$A = M(z_1, z_2) \in F \Leftrightarrow \tau(A) = 0 \Leftrightarrow z_1 + \bar{z}_1 \in F \Leftrightarrow z_1 \in i\mathbb{R}$$

Ainsi, avec $z_1 = ib$, $z_2 = c + id$, $b, c, d \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} ib & -c + id \\ c + id & -ib \end{pmatrix} = -bL + cJ + dK$$

une base de F est (J, K, L)

(b) Comme $(I, \underbrace{J, K, L}_{\text{base de } F})$ est une base orthonormée de H ,

il est immédiat que

$H^\perp = \text{Vect}(I)$

(c) Soit le vecteur $A = \underbrace{aI}_{\in F^\perp} + \underbrace{bJ + cK + dL}_{= B \in F} \in H$. Sa projection orthogonale sur F est donc $\pi(A) = B = bJ + cK + dL = A - aI$.

Notons que $B + \sigma(B) = \tau(B)I = \mathbf{0}$ (car $B \in F = \text{Ker}(\tau)$), donc $\sigma(B) = -B$.

$$\text{Par linéarité : } \begin{cases} A &= aI + B \\ \sigma(A) &= a\sigma(I) + \sigma(B) = aI - B \end{cases} \Rightarrow A + \sigma(A) = 2aI$$

Finalement : $B = A - aI = A - \frac{1}{2}(A + \sigma(A))$ soit

$$\pi(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$$

Note : ce résultat est naturel puisque π et σ sont les projections et la symétrie de même base et direction, donc $\text{Id} + \sigma = 2\pi$