Devoir Maison 15 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Si x est au voisinage de 0, il en est de même pour x^2. Nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} f(x^2) &= a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + o(x^4) \\ (x+1)f(x)) &= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_1+a_2)x^2 + (a_2+a_3)x^3 + (a_3+a_4)x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

L'unicité du DL permet d'identifier, d'où le système

$$a_0 = a_0\,,\ a_0 + a_1 = 0\,,\ a_1 + a_2 = a_1\,,\ a_2 + a_3 = 0\,,\ a_3 + a_4 = a_2$$

qui donne $a_1 = -a_0\,,\ a_2 = a_3 = a_4 = 0$ où a_0 est quelconque

soit le développement $\boxed{f(x) = a_0 - a_0x + o(x^4)}$

2. (a) Au voisinage de 0 nous avons : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$.

En intégrant, il vient $\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)$

d'où le développement annoncé

$\boxed{x \in \mathcal{V}(0) :\ \text{Arctan}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5)}$

(b) Pour $x \neq 0$ nous avons $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \frac{x}{|x|}\,\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, pour x au voisinage de $+\infty$ (donc positif) : $\text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(\frac{1}{x})$ où $\frac{1}{x}$ est au voisinage de 0. On peut utiliser le développement précédent d'où

$\boxed{x \in \mathcal{V}(+\infty) :\ \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + o(\frac{1}{x^5})}$

Exercice 2

On pose $E = \mathbb{R}^3$.

1. $\forall \overrightarrow{u} = (x,y,z) \in E, \forall \overrightarrow{v} = (x',y',z') \in E, \forall (\lambda,\mu) \in R^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= \frac{1}{2}(\lambda x + \mu x' + 2\lambda y + 2\mu y' - \lambda z - \mu z', \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z', \lambda x + \mu x' - 2\lambda y - 2\mu y' + 3\lambda z + 3\mu z') \\ &= \lambda\frac{1}{2}(x+2y-z, x+z, x-2y+3z) + \mu(x'+2y'-z', x'+z', x'+2y'+3z') \\ &= \lambda f(\overrightarrow{u}) + \mu f(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une application linéaire}}$.

De plus $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ donc $\boxed{f \in L(\mathbb{R}^3)}$

2. $\overrightarrow{u} = (x,y,z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$

$\boxed{\text{Ker } f = \{(-z,z,z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1,1,1))}$

$\text{Im } f = \{(x+2y-z, x+z, x-2y+3z), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,1,1),(2,0,-2),(-1,1,3))$ or $(-1,1,3) = (1,1,1) - (2,0,-2)$ et la famille $((1,1,1),(2,0,-2))$ est libre alors on peut écrire $\boxed{\text{Im } f = \text{Vect}((1,1,1),(2,0,-2))}$

3. $\overrightarrow{u} = (a,b,c) \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f \Leftrightarrow \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3, \overrightarrow{u} = \lambda_1(-1,1,1)$ et $\overrightarrow{u} = \lambda_2(1,1,1) + \lambda_3(2,0,-2)$

On résout donc $\begin{cases} -\lambda_1 = \lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = \lambda_2 - 2\lambda_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Conclusion $\boxed{\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{\overrightarrow{0}\}}$

4.

$$\begin{aligned} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f \circ f(x,y,z) = \frac{1}{2}(&\frac{1}{2}(x+2y-z) + x + z - \frac{1}{2}(x-2y+3z), \\ &\frac{1}{2}(x+2y-z) + \frac{1}{2}(x-2y+3z), \\ &\frac{1}{2}(x+2y-z) - x - z + \frac{3}{2}(x-2y+3z)) \\ &= \frac{1}{2}(x+2y-z, x+z, x-2y+3z) \\ &= f(x,y,z) \end{aligned}$$

$f \circ f = f$ et $f \in Ł(E)$ alors f est une projection.

5. <u>f est une projection</u> sur $\text{Im } f = \text{Vect}((1,1,1),(2,0,-2))$ suivant la direction $\text{Ker } f = \text{Vect}((-1,1,1))$