Devoir Maison 14 - Eléments de Correction

Exercice 1

Par définition de F nous pouvons dire que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F.

Il reste à montrer que cette famille est libre :

si $\alpha \sin + \beta \cos + \gamma \text{ sh} + \delta \text{ ch} = 0$ (fonction nulle), en dérivant deux fois il vient $-\alpha \sin - \beta \cos + \gamma \text{ sh} + \delta \text{ ch} = 0$.

Par addition et soustraction, on en déduit : $\begin{cases} \alpha \sin + \beta \cos = 0 & (1) \\ \gamma \text{ sh} + \delta \text{ ch} = 0 & (2) \end{cases}$

Utilisons (1) : en prenant les images de $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, (1) il vient $\alpha = \beta = 0$

Utilisons (2) : l'images de $x = 0$ donne $\delta = 0$. Il reste $\gamma \text{ sh} = 0$ d'où $\gamma{=}\delta{=}0$

La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de F $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F}$

Exercice 2

Partie I : Calcul matriciel

On considère les trois matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = QMQ.$$

1. Calculer $Q \times Q$. En déduire que Q est inversible et expliciter Q^{-1}.

$$QQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc Q est inversible, et on inverse est $Q^{-1} = Q$.

2. Calculer D (on vérifiera que D est une matrice diagonale).
Justifier que $M = QDQ$.

Calculons :

$$\begin{aligned} D &= QMQ \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D est bien une matrice diagonale.

Par ailleurs, puisque $Q = Q^{-1}$ et $QQ = I$, il vient :

$$D = QMQ \ \underline{\text{ssi}}\ QDQ = QQMQQ \ \underline{\text{ssi}}\ QDQ = M.$$

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = QD^nQ$.
   - L'égalité est vraie pour $n = 0$ ar $M^0 = I$ et $QD^0Q = QIQ = QQ = I$.
   - Supposons que $M^n = QD^nQ$ pour un entier $n \geq 0$ fixé et montrons que $M^{n+1} = QD^{n+1}Q$. Il vient :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= MM^n \\ &= MQD^nQ \\ &= QDQQD^nQ \\ &= QDD^nQ \\ &= QD^{n+1}Q. \end{aligned}$$

   - D'après le principe de récurrence simple, on a : $M^n = QD^nQ$ pour tout entier naturel n.

4. Expliciter les neuf coefficients de la matrice M^n.

Calculons $M^n = QD^nQ$. On a d'abord : $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^n$ car D est diagonale. Ensuite :

$$\begin{aligned} M^n &= QD^nQ \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\frac{1}{2})^n & -2(\frac{1}{2})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie II : Étude d'une expérience

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.
On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :
— à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
— à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
— à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),
et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :
— A_n : « obtenir 0 Pile à l'étape n »,
— B_n : « obtenir 1 Pile à l'étape n »,
— C_n : « obtenir 2 Piles à l'étape n ».

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

   Notons P_k^i (resp. F_k^i) l'événement « obtenir Pile (resp. Face) avec la pièce n°k au lancer n°i ».

   a_1 (resp. b_1, c_1) est la probabilité d'obtenir 0 (resp. 1, 2) Pile(s) après le premier lancer. Les pièces étant équilibrées, et les lancers indépendants, on a :

$$a_1 = P(F_1^1 \cap F_2^1) = P(F_1^1)P(F_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$b_1 = P\Big((P_1^1 \cap F_2^1) \cup (F_1^1 \cap P_2^1)\Big) = P(P_1^1)P(F_2^1) + P(F_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$c_1 = P(P_1^1 \cap P_2^1) = P(P_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

   Calculer les trois probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.

   Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$$

   car s'il y a eu 0 Piles à l'étape n, alors on ne relance aucune pièce et il y aura nécessairement 0 Piles à l'étape $n+1$.

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

   car s'il y a eu 1 Pile à l'étape n, alors on relance une seule pièce, qui donnera Face avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$$

   car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces, qui donneront chacune Face avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n \end{cases}$$

   Soit n un entier naturel non nul fixé. La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ constitue un système complet d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \\ &= a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n. \end{aligned}$$

   avec les probabilités conditionnelles calculées précédemment.

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}c_n.
\end{aligned}$$

avec :

$$P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$$

car s'il y a 0 Pile à l'étape n, on ne relance aucune pièce donc il ne peut y avoir 1 ou 2 Piles à l'étape suivante ;

$$P_{B_n}(C_{n+1}) = 0$$

car s'il y a 1 Pile à l'étape n, on relance une seule pièce donc il ne peut y avoir 2 Piles à l'étape suivante ;

$$P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 1 Pile à l'étape n, on relance cette pièce qui donne Pile avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

$$P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces qui donnent les couples Pile-Face ou Face-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$$P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

car s'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces qui donneront le couple Pile-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

4. (a) On vérifie par le calcul que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix},$$

où la matrice M a été définie dans la partie I.

(b) Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

— L'égalité est vraie pour $n = 1$ car $M^{1-1} = M^0 = I$.
— Supposons l'égalité établie au rang n, et montrons la au rang $n+1$.
On a :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MM^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

— D'après le principe de récurrence simple, l'égalité est établie pour tout $n \geq 1$.

5. (a) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(A_n) = 1 + \frac{1}{4^n} - \frac{2}{2^n}, \quad P(B_n) = \frac{2}{2^n} - \frac{2}{4^n}, \quad P(C_n) = \frac{1}{4^n}.$$

On avait trouvé dans la première partie :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n & 1 - 2(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{4})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 2(\frac{1}{2})^n - 2(\frac{1}{4})^n \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-(\frac{1}{2})^{n-1} & 1-2(\frac{1}{2})^{n-1}+(\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & (\frac{1}{2})^{n-1} & 2(\frac{1}{2})^{n-1}-2(\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{4}-(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ (\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-2(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{4})^n \\ 2(\frac{1}{2})^n-2(\frac{1}{4})^n \\ (\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

D'où le résultat.

(b) Vérifier que la somme de ces trois probabilités est égale à 1 et donner la limite de chacune d'elles.

Calculons, pour $n \geq 1$ fixé :

$$a_n + b_n + c_n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$$

avec $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont éléments de $]-1,1[$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = 0.$$