Devoir Surveillé 06

Le vendredi 24 Janvier 2025

14h-18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

On note $\mathbb{C}'$ l'ensemble des complexes de partie imaginaire **strictement positive** et P' le demi-plan associé à $\mathbb{C}'$. On appelle A le point de P' d'affixe i.

Pour tout réel t, on pose : $\forall z \in \mathbb{C}', \quad f_t(z) = \dfrac{z\cos(t) - \sin(t)}{z\sin(t) + \cos(t)}$.

1. Pourquoi f_t est-elle définie sur $\mathbb{C}'$?
2. Déterminer les points invariants de f_t selon la valeur de t.
3. Comparer les applications f_t et $f_{t+\pi}$.
4. Exprimer $\dfrac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i}$ en fonction de $\dfrac{z - i}{z + i}$ quand $z \in \mathbb{C}'$.
5. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| < |z + i|$?
   En déduire que f_t définit une application de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}'$.
6. Déterminer la composée $f_t \circ f_u$ où t et u sont deux réels.
7. On note $F = \{f_t \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $(F, \circ)$ est un groupe abélien.
8. *On supposera ici que t est un réel de* $]0, \frac{\pi}{2}[$. Soit D l'axe des imaginaires. On rappelle que son image réciproque par F_t est l'ensemble Δ des points M de P' tels que $F_t(M) \in D$.
   Montrer que Δ est un demi-cercle centré sur l'axe des réels et passant par un point fixe de F_t.

Exercice 2
Partie -A-

Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de φ.
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer sa dérivée.
3. Étudier le signe de $\varphi'(x)$.
4. Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.
5. Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également φ. Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
6. Déterminer le tableau de variations de φ et tracer sa courbe représentative.

Partie -B-

Soit f une fonction définie continue positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Soit la fonction g définie par : $g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\,\sin t}\,dt$.

1. Montrer que g est définie sur $\left]-1, +\infty\right[$. (on distinguera différents cas suivant les valeurs de x)
2. *Cas particulier :* on suppose dans cette question que : $\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \cos t$. Calculer $g(x)$.

On se replace désormais dans le cas général.

3. On suppose dans cette question que : $\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(t) = \sin(2t)$. Calculer $g(x)$.
4. Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que g est décroissante sur $\left]-1, +\infty\right[$.
5. Soient a et x des réels supérieurs strictement à -1 avec $a < x$.
   (a) Justifier $\frac{1}{1+x\,\sin t} \leqslant \frac{1}{1+a\,\sin t}$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) En déduire qu'il existe un réel K tel que :
   $$\forall\ (x,y) \in \left]a, +\infty\right[^2 ,\ \left|g(x) - g(y)\right| \leqslant K\ \left|x - y\right| .$$
   (c) En déduire que la fonction g est continue sur $\left]-1, +\infty\right[$
6. (a) Justifier que la fonction f est majorée sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Soit M un majorant de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
   Utiliser la relation de Chasles pour montrer :
   $$\forall\ x > 0\,, \quad g(x) \leqslant M b + \frac{M\,\pi}{2\,(1 + x\,\sin b)}.$$
   (c) Justifier que $g(x)$ admet une limite finie l quand x tend vers $+\infty$.
   Déduire de la majoration précédente la valeur de cette limite.
7. Montrer que g admet une limite L en -1 [finie ou non].
   Donner le tableau des variations de g .

Exercice 3
Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie -A-

On considère l'équation différentielle $\quad y' + 2\,x\,y = 1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

(on ne demande pas de résoudre cette équation)

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$

(que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.)

2. (a) Prouver que f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.
   (b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?
3. Justifier l'utilisation de la formule de Leibniz pour montrer que :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ f^{(k+2)}(x) = -\,2\,x\,f^{(k+1)}(x) - 2\,(k+1)\,f^{(k)}(x)$$
4. (a) Montrer que f admet, au voisinage de 0, un développement limité à tout ordre.
   Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o(x^n)$$
   (b) Utiliser le résultat du **3** pour montrer : $\forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ a_{k+2} = -\,\frac{2}{k+2}\,a_k$.
   En déduire : $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,,\ a_{2k+1} = \frac{(-4)^k\,k\,!}{(2\,k+1)\,!}$.
   (c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ et $k \quad (k \in \mathbb{N})$.

Partie -B-

On considère la fonction D de la variable réelle : $\quad D\ :\ x\ \mapsto\ e^{-x^2}\int_0^x e^{(t^2)}\,dt$.

5. Justifier le fait que D est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $\quad y' + 2\,x\,y = 1$.
6. Étudier la parité et le signe de D.
7. Montrer[1] que, pour tout réel positif x nous avons : $\quad x\,e^{-(x^2)} \leqslant D(x) \leqslant x$.
   Que peut-on dire dans le cas où le réel x est négatif ?
8. (a) Prouver que[2] : $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \int_1^x e^{(t^2)}\,dt = \frac{e^{(x^2)}}{2\,x} + \frac{e^{(x^2)}}{4\,x^3} - \frac{3\,e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt$.
   (b) Soit la fonction $h : t\ \mapsto\ \frac{e^{(t^2)}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[\,1\,,+\infty\,[$.
   En déduire que : $\quad \forall\, x \in [\,1\,,+\infty\,[\,,\ 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\ \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$
   et, qu'au voisinage de $+\infty$: $\quad \int_1^x \frac{e^{(t^2)}}{t^4}\,dt = o\left(\frac{e^{(x^2)}}{2\,x}\right)$
   (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $\quad \int_1^x e^{(t^2)}\,dt \sim \frac{e^{(x^2)}}{2\,x}$.
   En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.
9. (a) Prouver que D admet un maximum, atteint en un point b de R_+^*.
   (b) Montrer que ce maximum est égal à $\frac{1}{2\,b}$.
   (c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

1. On utilisera la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $t\ \mapsto\ e^{t^2}$
2. On peut se contenter de vérifier la formule annoncée. Il est cependant préférable d'établir cette formule par une double intégration par parties (qu'on justifiera).

Partie -C-

10. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2\,x\,y = 1$.
11. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.