Devoir Surveillé 06 - Eléments de Correction

Exercice 1
Partie -A-

1. φ est définie pour $x \neq 0$ et $1+x>0$ donc $\boxed{\mathcal{D} = \left]-1,0\right[\cup \left]0,+\infty\right[}$

2. φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient et composée de fonctions dérivables.
$\varphi'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$ donne $\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x\,(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}}$

3. $\varphi\,'(x)$ a le signe de $\psi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$ qui se dérive en $\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$.

Ceci permet d'étudier rapidement les variations de ψ :

x	-1		0		$+\infty$
$\psi\,'$		$+$	0	$-$	
ψ		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Comme $0 \notin \mathcal{D}$, on en déduit que $\varphi\,'$ est strictement négative $\boxed{\text{sur } \mathcal{D} : \quad \varphi\,'(x) < 0}$

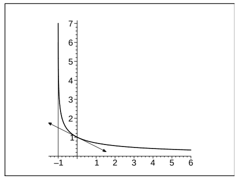
4. Les limites aux bornes de l'ensemble de définition ne présentent pas de difficultés :
•quand $x \to -1^+$, ce n'est pas une forme indéterminée $\boxed{\lim_{-1^+} \varphi = +\infty}$
•quand $x \to 0$, c'est une limite connue $\boxed{\lim_0 \varphi = 1}$
•quand $x \to +\infty$, $\varphi(x)$ équivalent à $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 $\boxed{\lim_{+\infty} \varphi = 0}$

5. •$\lim_{x=0} \varphi(x) = 0$ montre que φ est prolongeable en 0 en posant $\boxed{\varphi(0) = 1}$

•φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ (quotient et composée de telles fonctions)
•Le seul problème restant est en 0 (existence et continuité de φ').
Comme φ (prolongée) est continue sur $\left]0,+\infty\right[$, dérivable sur $\left]0,+\infty\right[- \{0\}$, il faut et il suffit de montrer que $\varphi\,'(x)$ admet une limite finie en 0.
Pour cela, utilisons un développement limité à l'ordre 0 :
$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x} - \frac{1}{x^2}\,\ln x = \frac{1}{x}\left(1 - x + o(x)\right) - \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2} + o(1)$
d'où la limite attendue $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left]-1,+\infty\right[\quad \text{et} \quad \varphi\,'(0) = -\frac{1}{2}}$

6. Nous avons tous les éléments pour représenter φ :

x	-1		0		$-\infty$
φ'		$-$	$\frac{1}{2}$	$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0



Partie -B-

1. Etudions les valeurs de t qui annulent $1 + x\,\sin t$. deux cas se présentent :
•$\underline{-1 < x < 1 :}$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\left|x\,\sin(t)\right| \leqslant \left|x\right| < 1 \quad \Rightarrow 1 + x\,\sin t > 0$.
•$\underline{x \geqslant 1}$: pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant 0 \Rightarrow 1 + x\,\sin t \geqslant 1$.
Ainsi, pour $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1 + x\,\sin t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Dans ces conditions, la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+x\,\sin t}$ est définie continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
donc intégrable sur cet intervalle. $\boxed{g : x \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\,\sin t}\,dt \text{ est définie sur } \left]-1,+\infty\right[}$

2. Remarquons que la fonction "cos" est bien continue positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Utilisons le changement de variable $u = \sin(t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + x\,\sin t}\,dt = \int_0^1 \frac{du}{1 + x\,u}$$

Deux cas se présentent :
•$\underline{x = 0}$: $g(0) = \int_0^1 du = \left[u\right]_0^1 = 1$
•$\underline{x \neq 0}$: $g(x) = \left[\frac{\ln(1+xu)}{x}\right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$
Conclusion $\boxed{g \text{ est la fonction } \varphi \text{ prolongée de la partie } \textbf{-A-}}$

3. Pour $-1 < x < y$, comparons $g(x)$ et $g(y)$:
$0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \Rightarrow \sin t \geqslant 0 \Rightarrow 0 < 1 + x\,\sin t < 1 + y\,\sin t \Rightarrow \dfrac{1}{1 + y\,\sin t} < \dfrac{1}{1 + x\,\sin t}$
En multipliant par $f(t) \geqslant 0$: $\frac{f(t)}{1+y\,\sin t} < \frac{f(t)}{1+x\,\sin t}$, et en intégrant $(0 < \frac{\pi}{2})$
on obtient $g(y) \leqslant g(x)$ $\boxed{g \text{ est décroissante sur } \left]-1,+\infty\right[}$

4. (a) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant 0$ donc, $-1 < a < x \Rightarrow 0 < 1 + a\sin t \leqslant 1 + x\sin t$
$\Rightarrow \frac{1}{1+x\sin t} \leqslant \frac{1}{1+a\sin t}$.

(b) Transformons la différence $g(x) - g(y)$. Par linéarité :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+y\sin t}\,dt = (y-x)\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\cos t)}\,dt$$

Ainsi : $|g(x) - g(y)| = |x-y| \left|\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\cos t)}\,dt\right|$

$$\leqslant |x-y| \int_0^{\pi/2} \left|\frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin t)(1+y\cos t)}\,dt\right| \quad (\text{car } 0 < \frac{\pi}{2})$$

$$\leqslant |x-y| \underbrace{\int_0^{\pi/2} \left|\frac{f(t)\sin t}{(1+a\sin t)^2}\,dt\right|}_{=K} \quad (\text{car } a < x \text{ et } a < y)$$

où l'intégrale est une constante K indépendante de x et y.

Conclusion $\boxed{\forall a > -1, \quad g \text{ est lipschitzienne sur }]a, +\infty[}$

(c) Pour tout réel $x_0 > -1$, il existe un réel $a > -1$ tel que $x_0 \in]a, +\infty[$.

Étant lipschitzienne, g est continue sur $]a, +\infty[$, donc continue en x_0.

Conclusion $\boxed{g \text{ est continue sur }]-1, +\infty[}$

5. (a) Étant continue sur un segment $\boxed{f \text{ est majorée sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$

(b) Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x > 0$: $\left.\begin{matrix} 0 \leqslant f(t) \leqslant M \\ 1 + x\sin t > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f(t)}{1+x\sin t} \leqslant \frac{M}{1+x\sin t} \leqslant M$

Si, de plus, $b \leqslant t$: $\sin b \leqslant \sin t \Rightarrow \frac{M}{1+x\sin t} \leqslant \frac{M}{1+x\sin b}$.

En intégrant (avec $0 < b$ et $b < \frac{\pi}{2}$) :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^b \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,dt + \int_b^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,dt \\ &\leqslant \int_0^b \frac{M}{1+x\sin t}\,dt + \int_b^{\pi/2} \frac{M}{1+x\sin t}\,dt \\ &\leqslant \int_0^b M\,dt + \int_b^{\pi/2} \frac{M}{1+x\sin b}\,dt \\ &\leqslant M\,b + \frac{M}{\underbrace{1+x\sin b}_{\geqslant 0}} \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - b\right)}_{\leqslant \pi/2} \leqslant M\,b + \frac{M\,\pi}{2\,(1+x\sin b)} \end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{\forall x > 0,\ \forall b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) \leqslant M\,b + \frac{M\,\pi}{2\left(1+x\sin b\right)}}$

(c) Il est clair que g est positive (intégrale d'une fonction positive avec $0 < \frac{\pi}{2}$).

g est décroissante minorée, $\boxed{g \text{ admet une limite finie } l \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$

x tend vers $+\infty$, on peut le supposer positif. En passant à la limite, l'encadrement $0 \leqslant g(x) \leqslant M\,b + \frac{M\,\pi}{2\left(1+x\sin b\right)}$ montre que

$\boxed{0 \leqslant l \leqslant M\,b}$

Mais ceci est valable pour tout réel b de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut faire tendre b vers 0^+.

Par pincement on obtient $\boxed{l = 0}$

6. Monotone sur $]-1, +\infty[$, $\boxed{g \text{ admet une limite } L \in \overline{\mathbb{R}} \text{ en } -1^+}$

On connaît les variations et les limites de g :

x	-1		$+\infty$
g	L	$\searrow$	0

Exercice 2
Partie -A-

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2\,x\,y = 1$

1. $\boxed{\text{(E) est une équation linéaire du premier ordre avec second membre}}$

2. (a) C'est une démonstration par récurrence.

•*Amorce* : par définition d'une solution d'une équation différentielle :
f est dérivable (donc de classe $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$.)

•*hérédité* : Si f solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^n$, l'égalité $f' = 1 - 2\,\mathrm{Id} \times f$ montre que f' est également de classe $\mathcal{C}^n$ donc f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ f$ de classe $\mathcal{C}^n$ d'où $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

(b) On utilise (E) avec $x = 0$, ce qui donne $f'(0) + 2 \times 0 \times f(0) = 1$ d'où $\boxed{f'(0) = 1}$

3. L'application identique (Id) et f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On peut utiliser la formule de Leibniz à tout ordre. En dérivant l'égalité (E) à l'ordre $k+1$, il vient

$$f^{(k+2)} + 2\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\ \mathrm{Id}^{(i)}\ f^{(k+1-i)} = 1^{(k+1)}$$

Comme les dérivées Id : $x \mapsto x$ sont nulles à partir de l'ordre 2, il reste

$$f^{(k+2)} + 2\left(\mathrm{Id}\ f^{(k+1)} + (k+1)\,f^{(k)}\right) = 0$$

donc $\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f^{(k+2)}(x) = -2\,x\,f^{(k+1)}(x) - 2\,(k+1)\,f^{(k)}(x)}$

4. (a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut appliquer la formule de Taylor-Young à tout ordre ce qui prouve que $\boxed{\forall\, p\in\mathbb{N},\ f \text{ admet un } \mathrm{DL}_p(0)}$

   (b) Dans le développement limité $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k + o(x^n)$ nous avons $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

   La question **??** appliquée avec $x = 0$ donne $f^{(k+2)}(0) = -\,2\,(k+1)\,f^{(k)}(0)$ qui se traduit en $a_{k+2}\,(k+2)! = -2\,a_k\,(k+1)!$ soit $\boxed{\forall\, k\in\mathbb{N},\ a_{k+2} = -\frac{2}{k+2}\,a_k}$

   Comme $a_1 = f^{(1)}(0) = 1$, on en déduit $a_3 = \frac{-2}{3}$, $a_5 = \frac{(-2)\times(-2)}{5\times 3}$, et, par une récurrence évidente $a_{2\,k+1} = \frac{(-2)^k}{3\cdot 5\cdots(2\,k+1)}$. En écrivant

   $3\cdot 5\cdots(2\,k+1) = \frac{(2\,k+1)!}{2\cdot 4\cdots(2\,k)} = \frac{(2\,k+1)!}{2^{\,k}\,k!}$ il vient $\boxed{a_{2\,k+1} = a_k = \frac{(-4)^k\,k!}{(2\,k+1)!}}$

   (c) De même $a_0 = f(0)$, $a_2 = \frac{(-2)}{2}\,f(0)$, $a_4 = \frac{(-2)^{\,2}}{2\times 4}\,f(0)$, et par récurrence

   $a_{2\,k} = \frac{(-2)^k}{2\cdot 4\cdots(2\,k)}\,f(0)$ qui s'écrit $\boxed{a_{2\,k} = \frac{(-1)^{\,k}}{k!}\,f(0)}$

Partie -B-

5. L'application : $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\Phi : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ en est une primitive. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme l'exponentielle).

   Ainsi : $D : x \mapsto e^{-x^2}\ \Phi(x)$ est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$) donc $\boxed{D \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R},}$

   La justification ci-dessus montre que D se dérive en D' telle que

$$D'(x) = (-2\,x)\ \underbrace{e^{-x^2}\ \Phi(x)}_{=\,D(x)} + e^{-x^2}\ \underbrace{e^{x^2}}_{\Phi'(x)}$$

   qui montre que D vérifie : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ D'(x) = -2\,xD(x) + 1$ $\boxed{D \text{ est solution de (E)}}$

6. La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est paire donc $\int_0^x e^{t^2}\,dt = -\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$.

   De plus : $e^{-x^2} = e^{-(-x)^2}$. Nous en déduisons que $\boxed{D \text{ est impaire}}$

   Il est évident que $D(x)$ est du signe $\int_0^x e^{t^2}\,dt$. Comme $e^{t^2} > 0$, l'intégrale est positive si et seulement si $0 < x$ $\boxed{D(x) \text{ est du signe de } x}$

7. Comme $t \mapsto e^{t^2}$ est croissante sur R_+, nous avons <u>pour tout x **positif**</u>

$$0 \leqslant t \leqslant x \Rightarrow e^{0^2} \leqslant e^{t^2} \leqslant e^{x^2} \Rightarrow \underbrace{\int_0^x dt}_{=\,x} \leqslant \int_0^x e^{t^2}\,dt \leqslant \underbrace{\int_0^x e^{x^2}\,dt}_{=\,x\ e^{x^2}}$$

   En divisant par $e^{x^2} > 0$ il vient $\boxed{x \geqslant 0 \Rightarrow x\,e^{-x^2} \leqslant D(x) \leqslant x}$

   <u>Pour x **négatif**</u>, nous avons $-x \geqslant 0$ donc $(-x)\,e^{-(-x)^2} \leqslant D(-x) \leqslant -x$.

   D est impaire. En changeant de signe il vient : $\boxed{x \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant D(x) \leqslant x\,e^{-x^2}}$

8. (a) <u>*Méthode 1 (vérification de la formule)*</u> : il suffit de dériver les deux membres de l'égalité. Les dérivées sont égales donc les deux membres sont égaux à une constante additive près. Comme l'égalité est évidente pour $x = 1$, la constante est nulle d'où le résultat.

   <u>*Méthode 2 (établir la formule)*</u> : on intégre 2 fois par parties

   $\int_1^x \underbrace{\frac{1}{2\,t}}_{u(t)}\ \underbrace{2\,t\,e^{t^2}}_{v'(t)}\ dt = \left[\frac{1}{2\,t}\,e^{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{2\,t^2}\,e^{t^2}\,dt$ (u et v de classe $\mathcal{C}^1$)

   et $\int_1^x \underbrace{\frac{1}{4\,t^3}}_{u(t)}\ \underbrace{2\,t\,e^{t^2}}_{v'(t)}\ dt = \left[\frac{1}{4\,t^3}\,e^{t^2}\right]_1^x + \int_1^x \frac{3}{4\,t^4}\,e^{t^2}\,dt$ (u et v de classe $\mathcal{C}^1$)

   donne bien $\boxed{\int_1^x e^{t^2} = \frac{e^{x^2}}{2\,x} + \frac{e^{x^2}}{4\,x^3} - \frac{3\,e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}$

   (b) Soit $h(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$. Sur $[\,1\,,+\infty\,[$: $h'(x) = \frac{2\,(x^2-1)\,e^{x^2}}{x^3} \geqslant 0$

   montre que $\boxed{h \text{ est croissante sur } [\,1\,,+\infty\,[}$

   Nous en déduisons

$$1 \leqslant t \leqslant x \Rightarrow \underbrace{\frac{e^{1^2}}{1^2}}_{0\,\leqslant} \leqslant \frac{e^{t^2}}{t^2} \leqslant \underbrace{\frac{e^{x^2}}{x^2}}_{=\,h(x)} \Rightarrow 0 \leqslant \frac{e^{t^2}}{t^4} \leqslant h(x)\,\frac{1}{t^2}$$

qu'on intègre de 1 à x $(1 \leqslant x)$ $\boxed{1 \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt}$

Comme $h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{x}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)$, en divisant par $\frac{e^{x^2}}{2x} > 0$, on obtient :

$$x > 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{\frac{e^{x^2}}{2x}} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt \leqslant \frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x\to\infty} 0$$

Par pincement, ceci prouve que $\boxed{\text{en } +\infty,\ \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)}$

(c) La question **??** donne $\int_1^x e^{t^2} = \frac{e^{x^2}}{2x} + \underbrace{\frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}\,dt}_{\text{négligeable devant } \frac{e^{x^2}}{2x}}$.

puisque, au voisinage de $+\infty$,

$\triangleleft\ \frac{e^{x^2}}{4x^3} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ (le quotient $\frac{1}{2x^2}$ tend vers 0)

$\triangleleft\ \frac{3e}{4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ (le quotient $\frac{2e^{x^2}}{3ex}$ tend vers 0)

$\triangleleft\ \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$ (question précédente)

ce qui permet de conclure $\boxed{\text{en } +\infty :\ \int_1^x e^{t^2}\,dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}}$

Enfin $D(x) = e^{-x^2}\left(\underbrace{\int_0^1 e^{t^2}\,dt}_{=\,K>0} + \int_1^x e^{t^2}\,dt\right) = K\,e^{-x^2} + e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt$

Or $e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt \sim e^{-x^2}\frac{e^{x^2}}{2x} = \frac{1}{2x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{K\,e^{-x^2}}{\frac{1}{2x}} = 0$ montre que $K\,e^{-x^2}$ est négligeable devant $e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt$. Ainsi $\boxed{\text{en } +\infty :\ D(x) \sim \frac{1}{2x}}$

9. (a) D étant impaire du signe de x, si D admet un maximum, celui-ci ne peut qu'être sur $[0\,,\,\infty[$. Montrons plus précisément que ce maximum est atteint en $b \in]0,1]$:

$\bullet$pour x assez grand nous avons $D(x) \leqslant D(1)$

l'équivalent montre que $\lim_{x\to+\infty} D(x) = 0$ donc, avec $\varepsilon = D(1) > 0$ nous avons

$$\exists\, A \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x,\ x \geqslant A \Rightarrow D(x) < D(1)$$

$\bullet D$ atteint un maximum M sur $[0\,,\,A]$

D est continue sur $[0\,,\,A]$ donc $D\big([0\,,\,A]\big)$ est un segment $[m, M]$,

et $M \in D([0\,,\,A]) \Rightarrow \exists\, b \in [0\,,\,A]\ D(b) = M$

$\bullet M = D(b)$ est le maximum absolu de D sur $\mathbb{R}$

$\triangleright D(1) \leqslant M$ puisque $1 \in [0\,,\,A]$

En effet, dans le cas contraire nous aurions

$$1 \geqslant A \Rightarrow D(1) < D(1)$$

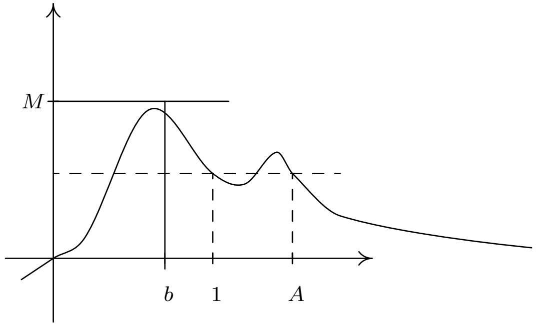
$\triangleright M$ est maximum absolu sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x, trois cas sont possibles :

$x < 0$ alors $D(x) \leqslant 0 \leqslant M$

$0 \leqslant x \leqslant A$ alors $D(x) \in D([0\,,\,A]) \Rightarrow D(x) \leqslant M$

$x > A$ alors $D(x) < D(1) \leqslant M$



De plus, $D(0) = 0 \neq M$ donc $b > 0$ $\boxed{D \text{ atteint son maximum absolu en } b \in \mathbb{R}_+^*}$

(b) La fonction D continue dérivable atteint son maximum en b qui n'est pas une borne de l'intervalle donc $D'(b) = 0$.

Comme D est solution de l'équation différentielle (E) nous en déduisons

$$\underbrace{D'(b)}_{=\,0} + 2\,b\,D(b) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{M = D(b) = \frac{1}{2b}}$$

(c) Si M est atteint en deux points b et b', nous avons alors $M = D(b) = D(b')$ d'où $\frac{1}{2b} = \frac{1}{2b'} \Rightarrow b = b'$ $\boxed{\text{le maximum est atteint en un point } b \text{ unique}}$

Partie -C-

10. L'équation (E) est linéaire :
    ▷Les solutions de l'équation homogène associée : $y' + 2\,x\,y = 0$
    sont $x \mapsto K\,e^{\int -2\,x}\,dx = K\,e^{-x^2}$ ▷D est une solution particulière de (E)

    Les solutions de (E) sont donc $\boxed{x \mapsto K\,e^{-x^{\,2}} + D(x) \quad K \in \mathbb{R}}$

11. D étant impaire, une solution ci-dessus est impaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad K\,e^{-x^{\,2}} + D(x) = -K\,e^{-(-x)^{\,2}} - \underbrace{D(-x)}_{=-D(x)}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad K\,e^{-x^{\,2}} = -K\,e^{-x^{\,2}} \quad \Leftrightarrow \quad K = 0$$

$$\boxed{D \text{ est la seule solution impaire de } (E)}$$