Devoir Maison 13

Pour le lundi 14 mars 2022

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit n, un entier naturel. On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \qquad (E_n)$$

1. Résoudre sur I, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation homogène associée (H_n) :

$$xy' + ny = 0 \qquad (H_n)$$

2. (a) Déterminer des constantes a, b et c telles que, pour tout $x \in I$:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

   (b) Résoudre l'équation (E_0) sur l'intervalle I.

3. Résoudre successivement, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$:
   (a) l'équation (E_1).
   (b) l'équation (E_2).
   (c) l'équation (E_3).

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note : pour tout $x \geq 0$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2} dt.$$

   Résoudre, sur I, l'équation (E_n) en exprimant les solutions au moyen de la fonction F_n.

5. Dans cette question, on va expliciter une expression de $F_n(x)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^1$ et $x \in \mathbb{R}^+$: simplifier $F_n(x) + F_{n+2}(x)$.
   (b) Exprimer $F_1(x)$ et $F_2(x)$ en fonction de $x \in I$.
   (c) Établir, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall x \in I, F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \ln(1+x^2) + (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}.$$

   (d) Établir, pour tout $n \geq 1$:

$$\forall x \in I, F_{2n+1}(x) = (-1)^n \operatorname{Arctan}(x) + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

   (e) Exhiber les solutions de (E_5) sur I.

Partie Optionnelle

6. On note f, la solution de (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(1) = \frac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$.
   (b) Établir que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x.$$
   (c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur I (limites aux bords comprises et justifiées). En particulier, on montrera que f admet une limite finie ℓ en 0 que l'on calculera.
   On posera désormais $f(0) = \ell$.
   (e) Prouver que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.
   (f) Tracer le graphe de la fonction f sur I.
7. Dans cette question, on généralise des résultats établis ci-dessus dans le cas particulier $n = 1$. Soit un entier $n \geq 1$.
   (a) Etablir que, pour tout $x > 0$:
   $$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}.$$
   (b) En déduire la limite de $\dfrac{F_n(x)}{\frac{x^n}{n}}$ lorsque x tend vers 0^+.
   (c) Montrer que, parmi les solutions de (E_n) sur $I =]0, +\infty[$, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note f_n cette fonction, prolongée en 0 par continuité.
   (d) Justifier que f_n est dérivable en 0.
   (e) En n'oubliant pas que f_n est une solution de l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
   (f) Prouver que, pour tout $n \geq 2$:
   $$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{\pi}{4} - fn(1)}{n-1}.$$