Devoir Maison 13 - Eléments de Correction

Exercice 1

Soit n, un entier naturel. On considère, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$xy' + ny = \frac{1}{1+x^2} \qquad (E_n)$$

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$, $(H_n) \Leftrightarrow y' + \frac{n}{x}y = 0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on va résoudre sur I avec $a : x \mapsto \frac{n}{x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On obtient qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$y : x \mapsto \lambda e^{-n\ln(x)} = \lambda \frac{1}{x^n},\ I \to \mathbb{R}$$

2. (a) Par identification des numérateurs on obtient $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$.
   (b) On considère $(E_0) : y' = \frac{1}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$ sur l'intervalle I. Par intégration simple on trouve une solution particulière de (E_0) :

$$y_p : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

   D'où la solution générale de (E_0) équation différentielle linéaire d'ordre 1 :

$$y_0 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda \frac{1}{x^n}$$

3. Déterminons une solutions particulière sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ de :

$$y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

   en utilisant la méthode de variation de la constante. On obtient :

$$\frac{\lambda'}{x^n} = \frac{1}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow \lambda' = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$$

   Par superposition des solutions on obtient les solutions de :
   (a) l'équation (E_1)

$$y_1 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) + \lambda \frac{1}{x}$$

   (b) l'équation (E_2)

$$y_1 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \lambda \frac{1}{x^2}$$

   (c) l'équation (E_3) en remarquant que $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$$y_1 : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \mathrm{Arctan}(x) + \lambda \frac{1}{x^3}$$

4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note : pour tout $x \geq 0$,

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}dt.$$

   La fonction $t \mapsto \frac{t^{n-1}}{1+t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, F_n est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et en constitue une primitive sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi $\lambda' = \frac{x^{n-1}}{1+x^2}$ implique que $\lambda = F_n$ convient, d'où les solutions de (E_n) sont :

$$y_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto F_n(x) + \lambda \frac{1}{x^n}$$

5. Dans cette question, on va expliciter une expression de $F_n(x)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F_n(x) + F_{n+2}(x) &= \int_0^x \frac{t^{n-1}+t^{n+1}}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1}(1+t^2)}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^x t^{n-1}dt \\ &= \frac{1}{n}x^n \end{aligned}$$

   (b) Exprimer $F_1(x)$ et $F_2(x)$ en fonction de $x \in I$.
   (c) Établir, pour tout $n \geq 2$:

$$\forall x \in I, F_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\ln(1+x^2) + (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k}.$$

   (d) Établir, pour tout $n \geq 1$:

$$\forall x \in I, F_{2n+1}(x) = (-1)^n \mathrm{Arctan}(x) + (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

   (e) Exhiber les solutions de (E_5) sur I.
6. On note f, la solution de (E_1) sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant la condition $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I,\ f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$.

(b) Établir que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan}(x) \leq x.$$

(c) En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle I.

(d) Dresser le tableau de variation de f sur I (limites aux bords comprises et justifiées). En particulier, on montrera que f admet une limite finie ℓ en 0 que l'on calculera.
On posera désormais $f(0) = \ell$.

(e) Prouver que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

(f) Tracer le graphe de la fonction f sur I.

7. Dans cette question, on généralise des résultats établis ci-dessus dans le cas particulier $n = 1$. Soit un entier $n \geq 1$.

(a) Etablir que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{x^n}{n}.$$

(b) En déduire la limite de $\dfrac{F_n(x)}{\frac{x^n}{n}}$ lorsque x tend vers 0^+.

(c) Montrer que, parmi les solutions de (E_n) sur $I =]0, +\infty[$, il y en a une et une seule qui possède une limite finie en 0. On note f_n cette fonction, prolongée en 0 par continuité.

(d) Justifier que f_n est dérivable en 0.

(e) En n'oubliant pas que f_n est une solution de l'équation différentielle (E_n), déterminer le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.

(f) Prouver que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{\frac{\pi}{4} - fn(1)}{n-1}.$$