DM 13 Correc° Suite 1

5) ⓑ $\forall x \in I$, $F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$$F_1(x) = \text{Arctan}(x)$$

et $F_2(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2}\ln(1+\cancel{t}x^2)$$

ⓒ Récurrence

(I) $F_4(x) \cancel{+} F_2(x) = \frac{1}{2}x^2$

donc $F_4(x) = \frac{1}{2}(x^2 - \ln(1+x^2))$

(H) $F_{2n+2}(x) = \frac{1}{2n}x^{2n} - F_{2n}(x)$

et on remplace par l'hyp de récurrence.

ⓓ Récurrence

ⓔ Les solutions de (E_n) sur I sont

$y_n : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n}$

donc $\boxed{y_5 : x \mapsto \frac{F_5(x)}{x^5} + \frac{\lambda}{x^5}}$

avec $F_5(x) = (-1)^2 \text{Arctan}(x) + (-1)^1 \sum_{k=0}^{1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

$$F_5(x) = \text{Arctan}(x) - x + \frac{x^3}{3}$$

6) ⓐ (E_1) a pour solu° $y_1 : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \frac{\lambda}{x}$

f est solution de (E_1) sur I avec

$$f(1) = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow \text{Arctan}(1) + \lambda = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \lambda = 0$ donc $\boxed{f : x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x}}$

ⓑ Soit $x > 0$:

sur $[0; x]$, Arctan dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\text{Arctan}'(\cancel{x}t) = \frac{1}{1+\cancel{x}t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}$

donc pour $t \in [0; x]$

$$0 < t^2 < x^2$$

$$1 < 1+t^2 < 1+x^2$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \text{Arctan}'(t) < 1$$

Par l'IAF,

$$\frac{1}{1+x^2}(x-0) < \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)$$

$$< 1 \times (x-0)$$

donc $\boxed{\frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan}(x) < x}$

ⓒ $f \in \mathcal{D}(I)$ et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \times x - \text{Arctan}(x)\right) / x^2$$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan}(x)\right) \times \frac{1}{x^2}$$

On a $\forall x \in I$, $\text{Arctan}(x) - \frac{x}{1+x^2} > 0$

Donc $f'(x) < 0$

et $\boxed{f \text{ décroissante sur } I}$

$\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$

donc $f \underset{0}{\sim} 1$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^+, -\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$

donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

x	0	$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow 0$

$\boxed{\text{Posons le prolongement par continuité de } f \text{ en posant } f(0) = 1}$

$DL_2(0)$: $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + o(x^2)$

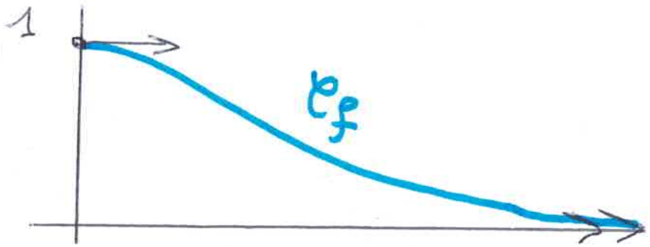
$\text{Arctan}(x) = \text{Arctan}(0) + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

d'où $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)$

or f continue en 0

Donc f dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

(f)



7) (a) Soit $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t^2}\,dt$$

$\forall t \in [0; x]$ $\frac{1}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$

Par croissance de l'intégrale avec $0 \leqslant x$

$$\frac{1}{1+x^2}\int_0^x t^{n-1}\,dt \leqslant F_n(x) \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,dt$$

$$\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x \leqslant F_n(x) \leqslant \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^x$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n}}$$

(b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

Par encadrement

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F_n(x)}{x^n/n} = 1$$

(c) les soluO de (E_n) sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont

$$y_n : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{F_n(x) + \lambda}{x^n}$$

DM 13 Correction Suite 3

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lambda}{x^n} = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } \lambda \neq 0 \\ 0 \text{ si } \lambda = 0 \end{cases}$$
avec $n \geqslant 1$

Donc f_n admet une limite finie en 0 si et seulement si $\lambda = 0$. Dans ce cas $\lim_{0^+} f_n = \frac{1}{n}$

On pose donc

$$\boxed{f_n : x \longmapsto \begin{cases} \frac{F_n(x)}{x^n} & \text{pour } x > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{pour } x = 0 \end{cases}}$$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leqslant F_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n}$$

$$\frac{1}{nx}\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) \leqslant \frac{nF_n(x) - x^n}{nx^{n+1}} \leqslant 0$$

$$\frac{1}{n}\left(-x + o(x)\right) \leqslant \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} \leqslant 0$$

Donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x) - \frac{1}{n}}{x} = 0$ par encadrement

$\boxed{\text{D'où } f_n \text{ dérivable en } 0 \text{ et } f_n'(x) = 0}$

(e) f_n solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x f_n'(x) + n f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$

or $\frac{1}{1+x^2} \times \frac{x^n}{n} \leqslant F_n(x)$

donc $\left(x f_n'(x) + n f_n(x)\right) \times \frac{x^n}{n} \leqslant F_n(x)$

$$x f_n'(x) \leqslant \frac{F_n(x)}{x^n} \times n - n \underbrace{f_n(x)}_{= \frac{F_n(x)}{x^n}}$$

$$x f_n'(x) \leqslant 0$$

or $x > 0$

$f_n'(x) \leqslant 0$ or $f_n'(0) = 0$

Donc $\boxed{f_n \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^+}$

(f) Soit $n \geqslant 2$

$$I = \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} - x f_n'(x)\,dx$$

Par IPP :

$$I = \frac{1}{n}\left[\text{Arctan}(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n}\left[x f_n(x)\right]_0^1 + \frac{1}{n} I$$

$$I \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}\text{Arctan}(1) - \frac{1}{n} f_n(1)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\pi}{4} - f_n(1)\right)}$$