

# Devoir Maison 12

Pour le 28 Février 2022

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

## Exercice 1

Soit  $\theta$  un nombre réel tel que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^2 \cos^2 \theta - 2z \sin \theta \cos \theta + 1 = 0$$

2. Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.
3. Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 + \cos 2\theta)y'' - 2y' \sin(2\theta) + 2y = 0$$

## Exercice 2

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)dt$$

1. Justifier que  $\int_0^x (x-t)f(2t)dt$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. Que vaut  $f(0)$  ?
3. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(2x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(2t)dt$
4. Démontrer que si  $f$  est une fonction vérifiant (1) alors elle est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre qu'on précisera.
5. Résoudre cette équation différentielle.
6. Déterminer la ou les fonctions  $f$  vérifiant (1).