Devoir Maison 12 - Eléments de Correction

Exercice 1

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Soit l'équation : $z^2cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$

   Si $\theta = \frac{\pi}{2}$ alors l'équation équivaut à 1=0 ce qui est impossible donc elle n'a pas de solution. Sinon son discrimant est $\Delta = 4\sin^2\theta\cos^2\theta - 4\cos^2\theta = 4\cos^2\theta(\sin^2\theta - 1) = -4\cos^4\theta < 0$

   alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta} + i\frac{2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = \tan\theta + i$ et $z_2 = \tan\theta - i$

   $\tan\theta$ existe car $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{\tan\theta + i; \tan\theta - i\}}$

2. $|z_1| = |z_2| = \sqrt{\tan^2\theta + 1} = \frac{1}{\cos\theta}$ car $\cos\theta > 0$

   Soit α un argument de z_1 : $\cos\alpha = \frac{\tan\theta}{\frac{1}{\cos\theta}} = \sin\theta$ et $\sin\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\cos\theta}} = \cos\theta$ donc $\alpha \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$

   Conclusion : $\boxed{|z_1| = |z_2| = \frac{1}{\cos\theta} \quad Arg(z_1) = \frac{\pi}{2} - \theta \quad Arg(z_2) = -\frac{\pi}{2} + \theta}$

3. Soit l'équation différentielle : $(1 + \cos 2\theta)y'' - 2y'sin(2\theta) + 2y = 0$

   Elle équivaut à $\frac{(1+\cos 2\theta)}{2}y'' - y'sin(2\theta) + y = 0 \Leftrightarrow \cos^2\theta y'' - y'sin(2\theta) + y = 0$

   Son équation caractéristique est $r^2cos^2\theta - 2r\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$

   d"¿après l'étude précédente les solutions sont $r_1 = \tan\theta + i$ et $r_2 = \tan\theta - i$

   Alors les solutions de l'équation différentielle sont données par :

   $\boxed{\mathcal{S} = \left\{f_{A,B} : x \mapsto e^{x\tan\theta}\left(A\cos x + B\sin x\right)\right\}}$

Exercice 2

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)\mathrm{d}t$$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel la fonction : $t \mapsto x - t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi par produit de fonctions continues, la fonction : $t \mapsto (x-t)f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout x réel le segment $[0, x]$ est inclus dans $\mathbb{R}$ donc $\int_0^x (x-t)f(2t)\mathrm{d}t$ est <u>définie sur $\mathbb{R}$</u>.

2. $\boxed{f(0) = 1}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 1 + \int_0^x (x-t)f(2t)\mathrm{d}t = 1 + x\int_0^x f(2t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(2t)\mathrm{d}t$

   On rappelle que si g est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors la fonction : $x \mapsto \int_a^x g(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g(x)$

   ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(2x) = \int_0^x f(2t)\mathrm{d}t + xf(2x) - xf(2x) = \int_0^x f(2t)\mathrm{d}t$$

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(2x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(2t)\mathrm{d}t}$

4. Puisque f est deux fois dérivable on peut à nouveau dériver cette expression et alors :

   $\forall x \in \mathbb{R}, 2f''(2x) = \frac{1}{2}f(2x)$

   Conclusion : si f est une fonction vérifiant (1) alors elle est solution de l' équation différentielle linéaire du second ordre $\boxed{y'' - \frac{1}{4}y = 0}$

5. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{y_{A,B} : t \mapsto Ae^{\frac{1}{2}t} + Be^{-\frac{1}{2}t}, (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$

6. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = Ae^x + Be^{-x}$ donc $f(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{2}}$

   or $f(0) = 1 \Leftrightarrow A + B = 1$ d'où $f(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} - Ae^{-\frac{x}{2}} = 2A\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad A \in \mathbb{R}$

   Par ailleurs $f'(0) = 0$ alors $A - \frac{1}{2} = 0$ d'où $A = \frac{1}{2}$ alors $f(x) = \mathrm{ch}\,\frac{x}{2}$

   Réciproquement on vérifie que cette fonction est bien solution de (1) : d'une part $f(2x) = \mathrm{ch}\,x$

   d'autre part $1 + x\int_0^x \mathrm{ch}\,tdt - \int_0^x t\,\mathrm{ch}\,tdt = 1 + x\,\mathrm{sh}\,x - [t\,\mathrm{sh}\,t]_0^x + \int_0^x \mathrm{sh}\,tdt = 1 + x\,\mathrm{sh}\,x - x\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x - 1 = \mathrm{ch}\,x$

   <u>Conclusion</u> : la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = \mathrm{ch}\,x}$ est la seule fonction vérifiant (1).