Devoir Maison 11

Pour le lundi 3 Février 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1.
   (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.

2.
   (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

3.
   (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.

Exercice 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x ..

1. (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.
   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions , l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$
   Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $-2 \leq \alpha_2 \leq -1$.
   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $\alpha_2 \leq u_k \leq -1$.
   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate,
   montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leq b \leq -1$, $0 \leq e^b - e^a \leq \frac{1}{e}(b - a)$.

(d) Montrer que pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$

En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k : $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$.

(e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.

Exercice 3 (Facultatif, plus difficile)

Questions liminaires

(L_1) Montrer : $\forall\ x > 0 \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(L_2) Montrer : $\forall\ x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x$

Étude de la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{\sqrt{(n+a)!}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+\sqrt{j}\right)}$

où la constante a est un entier naturel non nul.

1. **Convergence de la suite**
   (a) Calculer le rapport $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$ pour $n \geqslant 2$.
   (b) En déduire que la suite u est monotone à partir d'un certain rang N que l'on précisera.
   (c) En déduire que la suite converge (on ne demande pas sa limite).
2. **Limite de la suite**
   (a) Etudier la limite de $\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right)\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

   En déduire qu'il existe un entier M, que l'on ne cherchera pas à calculer, tel que

$$\forall\ n, \quad n \geq M \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

   (b) Utiliser les questions liminaires pour montrer que

$$\forall\ n \geqslant M, \quad \ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n+1}.$$

   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ converge vers 0.