Devoir Maison 11 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. (a) On a : $f_n(0) = -4$ et $f_n \underset{\to}{\to} +\infty$ en $+\infty$; f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = nx^{n-1} + 9x = x(nx^{n-1} + 9) > 0$.

   f_n est donc bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $[-4, +\infty[$. Comme $0 \in [-4, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ a donc une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On a donc $u_n \geq 0$ et $f_n(u_n) = 0$.

   (b) Pour calculer u_1 et u_2, il faut résoudre $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$:

   $f_1(x) = x + 9x^2 - 4$ polynôme du second dégré de déterminant :$\Delta = 1 + 4.4.9 = 145$ donc $u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}$..qui est la racine positive de cette équation.

   $f_2(x) = x^2 + 9x^2 - 4 = 10x^2 - 4 = 10(x - \sqrt{2/5})(x + \sqrt{2/5})$ donc $u_2 = \sqrt{2/5}$.

   (c) On a $f_n(2/3) = (2/3)^n + 9(2/3)^2 - 4 = (2/3)^n > 0$ et $f_n(0) = -4$

   Donc $f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(2/3)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils ens osnt éléments, on a $0 \leq u_n \leq \frac{2}{3}$.

   et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \frac{2}{3}[.}$

2. (a) Soit $x \in]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$ et comme $x < 1$ et $x^n > 0$ on a bien $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

   (b) Donc, comme $u_n \in]0, \frac{2}{3}[$, ona $u_n \in]0, 1[$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_n(u_{n+1})$.

   Donc $f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$ et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que u_n et u_{n+1} en sont éléments, on a alors $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n et la suite u est croissante.

   (c) u est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc elle est convergente vers ℓ avec $0 \leq \ell \leq \frac{2}{3}$.

3. (a) Comme $0 \leq u_n \leq 2/3$ et que la fonction puissance n est strictement coirssante pour $n > 0$ sur $\mathbb{R}^+$ (sur $\mathbb{R}^-$ celà dépendrait de la parité de n) alors $0^n \leq (u_n)^n \leq (2/3)^n$ et comme $|2/3| < 1$ on a $(2/3)^n \to 0$ donc par encadrement $u_n \to 0$

   (b) Or ${u_n}^n + 9\,{u_n}^2 - 4 = 0$ alor spar passage à la limite,

   Donc $9\ell^2 - 4 = 0$ et $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell \geq 0$. *Conclusion* **:** $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell = \frac{2}{3}}$

Exercice 2

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x ..

1. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$ donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

   En $+\infty$: $g(x) = e^x - x = e^x(1 - x/e^x) \to +\infty$ car $x = o(e^x)$

   En $-\infty$: $g(x) = e^x - x \to +\infty$

   (b) Comme g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, elle est bijective de $\mathbb{R}^-$ dans $[g(0), \lim_{-\infty} g[= [1, +\infty[$

   Comme $n \geq 2$ appartient à $[1, +\infty[$, l'équation a une unique solution sur $\mathbb{R}^-$.

   et comme $g(0) = 1 \neq 2$, alors $\alpha_n \neq 0$

   et de même sur $\mathbb{R}^+$

   Conclusion : $\boxed{(E_n) \text{ admet exactement deux solutions : } \alpha_n < 0 \text{ et } \beta_n > 0}$

2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$

   On a $g(-1) = e^{-1} + 1 < 2$ car $-1 < 0$ d'où $e^{-1} < e^0 = 1$

   et $g(-2) = e^{-2} + 2 > 2$

   Donc $g(-1) < g(\alpha_0) < g(-2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$,

   Conclusion : $\boxed{-2 \leq \alpha_2 \leq -1}$

   (b) On a $2 = g(\alpha_2) = e^{\alpha_2} - \alpha_2$ donc $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.

   Pour $k = 0$ on a $u_0 = -1$ donc$\alpha_2 \leq u_0 \leq -1$

   Soit $k \geq 0$ tel que $\alpha_2 < u_k < -1$.

   alors,comme exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{\alpha_2} - 2 \leq e^{u_n} - 2 \leq e^{-1} - 2$ et donc

   $\alpha_2 \leq u_{k+1} \leq e^{-1} - 2 \leq -1$ car $e^{-1} \leq 1$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k : \alpha_2 < u_k < -1}$

   (c) Sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ on a $\exp'(x) = e^x \leq e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc $0 \leq \exp'(x) \leq \frac{1}{e}$

   Donc d'après l'inégalité des accroissements finis si $b \geq a$ sont dans cet intervalle, $0 < e^b - e^a < \frac{1}{e}(b - a)$

   N.B. pour l'IAF sans valeur absolue, l'ordre des termes est impératif;

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ tels que } a \leq b \leq -1 \text{ , } 0 < e^b - e^a < \frac{1}{e}(b-a).}$

(d) Pour tout entier naturel k , $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - 2 - (e^{\alpha_2} - 2)$ car $\alpha_2 = e^{\alpha_2} - 2$ donc $u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$

On a alors :

pour $k = 0$: $u_0 - \alpha_2 = -1 - \alpha_2$ et comme $-1 \leq \alpha_2 \leq -2$ alors $0 \leq u_0 - \alpha_2 \leq 1 = \left(\frac{1}{e}\right)^0$

Soit $k \geq 0$ tel que $0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k$

comme alors $u_k \leq \alpha_2 \leq -1$ on a $0 \leq u_{k+1} - \alpha_2 \leq \frac{1}{e}(u_k - \alpha_2) \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{k+1}$ donc par récurrence,

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k : 0 \leq u_k - \alpha_2 \leq \left(\frac{1}{e}\right)^k.}$

(e) Comme $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ alors $\left(\frac{1}{e}\right)^k \to 0$ et par encadrement $u_k - \alpha_2 \to 0$ et

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = \alpha_2}$

Exercice 3

Questions liminaires

• Pour $x > 0$, nous avons $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Or $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 2\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Conclusion $\boxed{\forall\, x > 0, \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (\mathrm{L}_1)}$

• La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave sur $]-1, +\infty[$. La courbe représentative est située sous ses tangentes, en particulier sous la tangente au point d'abscisse 0.

Cette tangente a pour équation $y = x$ d'où $\boxed{\forall\, x > -1, \quad \ln(x+1) \leqslant x \qquad (\mathrm{L}_2)}$

Note : on peut également obtenir se résultat par une étude rapide de la fonction φ définie pour $x > -1$ par $\varphi(x) = \ln(1+x) - x$:
$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = -\frac{x}{x+1}$ ce qui donne le tableau des variations

x	-1		0	$+$	∞
φ'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
φ	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

qui montre que $\forall\, x > -1, \quad \varphi(x) \leqslant 0$

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{\sqrt{(n+a)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\sqrt{j})}$

(a) Il est clair que la suite est définie, strictement positive.

On peut utiliser le quotient. $\boxed{\forall\, n \geqslant 2 : \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+a}}{1+\sqrt{n}}}$

(b) Nous avons : $\frac{u_n}{u_{n-1}} < 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{n+a} < 1 + \sqrt{n} \\
&\Leftrightarrow n + a < 1 + n + 2\sqrt{n} && \text{quantités positives} \\
&\Leftrightarrow a - 1 < 2\sqrt{n} \\
&\Leftrightarrow (a-1)^2 < 4n && a-1 \text{ est positif ou nul} \\
&\Leftrightarrow n > \tfrac{(a-1)^2}{4} \\
&\Leftrightarrow n > N
\end{aligned}$$

où $N = E\left(\frac{(a-1)^2}{4}\right)$

La suite étant positive : $u_n < u_{n-1} \Leftrightarrow n > N$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant N} \text{ est décroissante}}$

(c) La suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ est décroissante minorée par 0 donc $\boxed{(u_n)_{n\in N^*} \text{ converge}}$

2. (a) D'après **1-a** : $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right)\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+a} - \sqrt{n} - 1\right)\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.

Or, quand $n \to +\infty$, $\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}} \to 1$ et $\sqrt{n+a} - \sqrt{n} = \frac{a}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} \to 0$ Conclusion $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right)\sqrt{n} = -1}$

D'où l'existence d'un entier M à partir duquel cette quantité appartient à l'intervalle $\left[-1-\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\right]$. Dans ces conditions, $\left(\frac{u_n}{u_{n-1}} - 1\right)\sqrt{n} \leqslant -\frac{1}{2}$

d'où $\boxed{\exists\, M \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n, \quad n \geqslant M \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}}$

(b) Rappelons que $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 0$. En utilisant ce qui précède, L_2 (avec $x = -\frac{1}{2\sqrt{n}} > -1$) puis L_1 (avec x=n¿0), nous avons :

$$\ln\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \ln\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \leqslant -\frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$$

Conclusion $\boxed{\forall\, n \geqslant M : \quad \ln\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$

(c) Il suffit alors d'ajouter les égalités précédentes pour les valeurs $M, M+1, \cdots, n$. Le principe des dominos donne :

$$\left.\begin{array}{lcc}
\ln\frac{u_M}{u_{M-1}} & \leqslant & \sqrt{M} - \sqrt{M+1} \\
\ln\frac{u_{M+1}}{u_M} & \leqslant & \sqrt{M+1} - \sqrt{M+2} \\
\cdots & & \\
\ln\frac{u_n}{u_{n-1}} & \leqslant & \sqrt{n} - \sqrt{n+1}
\end{array}\right\} \Rightarrow \ln\frac{u_n}{u_{M-1}} \leqslant \sqrt{M} - \sqrt{n}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} \ln\frac{u_n}{u_{M-1}} = -\infty$ soit $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{u_{M-1}} = 0$

$\boxed{\lim_{n\to-\infty} u_n = 0}$