Devoir Maison 10

Pour le lundi 20 janvier 2025

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{lll} x_0 = 3 & \text{et} & x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 & \text{et} & y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{array}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.
2. (a) Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?
   (b) x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.
   (b) Exprimer y_n en fonction de n.
   (c) En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.
   (d) On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.
   Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice 2

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit a, b, x, y, quatre réels qui vérifient : $aA + bI = xA + yI$. Montrer que $a = x$ et $b = y$.
2. (a) Calculer A^2 en fonction de A et I.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$.
   On vérifiera, pour tout entier naturel n, les relations $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.
3. (a) Si l'on suppose que pour un certain entier naturel n, u_n et v_n sont positifs, montrer que u_{n+1} et v_{n+1} sont également positifs.
   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.
4. Etablir, pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$.

Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les relations :

$$u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \text{ et } u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1}$$

Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose : $d(M) = ad - bc$.

1. Soit a, b, c, d, x, y, z, t, huit réels quelconques. On considère les deux matrices :
   $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer le produit MN ainsi que $d(MN)$.
2. Montrer que $d(MN) = d(M) \times d(N)$
3. Etablir par récurrence, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule : $d(M^n) = [d(M)]^n$.
4. En utilisant le résultat précédent, montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n.$$