Devoir Maison 10 - Eléments de Correction

Exercice 1

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 3 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 2x_n - 1$$
$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2y_n + 3.$$

1. • *Initialisation* Pour $n = 0$, $x_0 = 3 = 2^1 + 1$. La relation est vraie au rang 0.
   • *Hérédité* Supposons que pour $n \in \mathbb{N}*$ on ait $x_n = 2^{n-1} + 1$; on a donc $x_{n+1} = 2x_n + 1 = 2^n + 2 + 1 = 2^{n+1} + 1$: la relation est encore vraie au rang $n + 1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n + 1$.
   Donc d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n, $x_n = 2^{n+1}+1$.
2. (a) On a donc $x_8 = 2^9 + 1 = 513$ et $x_9 = 2^{10} + 1 = 1025$.
   L'algorithme d'Euclide donne
   $1025 = 513 + 512$
   $513 = 512 + 1$
   Le dernier reste non nul est 1 ce qui signifie que x_8 et x_9 sont premiers entre eux : PGCD$(x_8\ ;\ x_9) = 1$.
   $x_{2002} = 2 \times 2^{2002} + 1$ et $x_{2003} = 2 \times 2^{2003} + 1$.
   On peut écrire x_{2003} sous la forme :
   $x_{2003} = 2 \times 2^{2003} + 1 =$
   $x_{2003} = 2^{2003} + 2^{2003} + 1 =$
   $x_{2003} = x_{2002} + 2^{2003}$; comme $2^{2003} = x_{2002} - 1$ et que $x_{2002} - 1 < x_{2003}$, l'égalité montre que le reste de la division de x_{2003} par x_{2002} est 2^{2003}.
   Ensuite $x_{2002} = x_{2002} - 1 + 1$: le reste de la division de x_{2002} par $x_{2002} - 1$ est égale à 1 : ceci signifie que le PGCD$(x_{2003}\ ;\ ) = 1$.
   $2 \times 2 \times 2^{2002} + 1 = 2\,(x_{2002} - 1) + 1 = 2x_{2002} + 1$.

   (b) La première définition peut s'écrire : $2x_n - x_{n+1} = 1$: d'aprÃ¨s la relation de Bezout ceci signifie que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux.
3. (a) • *Initialisation* Pour $n = 0$, $2x_0 - y_0 = 6 - 1 = 5$. La relation est vraie au rang 0.
   • *Hérédité* Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}*$ tel que $2x_p - y_p = 5$.
   Alors $2x_{p+1} - y_{p+1} = 2\,(2x_p - 1) - (2y_p + 3) = 2\,(2x_p - y_p) - 2 - 3 = 2 \times 5 - 5 = 5$.
   L'hérédité est démontrée.
   Quel que soit le naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

   (b) Les questions 1. et 3. montrent donc que :
   $y_n = 2x_n - 5 = 2\left(2^{n+1} + 1\right) - 5 = 2^{n+2} - 3$.

   (c) On a successivement :
   $2^0 \equiv 1 \mod 5$;
   $2^1 \equiv 2 \mod 5$;
   $2^2 \equiv 4 \mod 5$;
   $2^3 \equiv 3 \mod 5$;
   $2^4 \equiv 1 \mod 5$.
   Cette dernière équivalence entraîne que $2^4 \times 2^p \equiv 2^p \mod 5$, soit $2^{p+4} \equiv 2^p \mod 5$ c'est-à-dire que les restes de 2^p par 5 sont périodiques de période 4 et ce reste dépend du reste de la division de p par 4 :
   - Si $p = 4k + 0$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 1 \mod 5$;
   - Si $p = 4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 2 \mod 5$
   - Si $p = 4k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 4 \mod 5$
   - Si $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$, $2^p \equiv 3 \mod 5$

   (d) d_n étant diviseur commun à x_n et y_n est aussi diviseur commun à $2x_n$ et y_n et aussi de la différence $2x_n - y_n$ soit diviseur de 5.
   Donc $d_n \in \{1\ ;\ 5\}$
   Si $d_n = 5$ alors 5 divise x_n et y_n et si 5 divise x_n, alors 5 divise $2x_n - 5 = y_n$.
   Finalement $d_n = 5$ si et seulement si x_n est multiple de 5.
   Or 5 divise x_n si et seulement si $x_n \equiv 0 \mod 5 \Leftrightarrow 2^{n+1} + 1 \equiv 0 \mod 5 \Leftrightarrow 2^{n+1} \equiv 4 \mod 5$.
   Or on a vu que $2^p \equiv 4 \mod 5$ si $p = 4k+2$, soit $n+1 = 4k+2 \Leftrightarrow n = 4k+1$.
   Finalement $d_n = 1$, soit x_n et y_n sont premiers entre eux si et seulement si $n \neq 4k + 1$, donc si n n'est pas congru à 1 modulo 4.

Exercice 2

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Soit a, b, x, y, quatre réels qui vérifient : $aA + bI = xA + yI$.Montrons que $a = x$ et $b = y$.

On a $aA + bI = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$

de même $xA + yI = \begin{pmatrix} y & x \\ x & x+y \end{pmatrix}$

Par suite $aA + bI = xA + yI \iff \{b = y, a = x, a + b = x + y\}$

Soit $\boxed{aA + bI = xA + yI \iff \{a = x, b = y\}}$

2. (a) Calcul de A^2 en fonction de A et I.
$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
On remarque alors que $\boxed{A^2 = A + I}$

(b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$.

♣ Par définition on a $A^0 = I = 0A + 1I$
donc il existe bien deux réels $u_0 = 0, v_0 = 1$ tels que $A^0 = u_0 A + v_0 I$
Ce couple (u_0, v_0) est bien unique car d'après la question 1. si l'on a $u_0A+v_0I = xA+yI$ alors $u_0 = x, v_0 = y$.

♣♣ On suppose que pour un entier naturel n, il existe un unique couple de réels (u_n, v_n) tel que $A^n = u_n A + v_n I$.
Montrons qu'il existe alors un unique couple (u_{n+1}, v_{n+1}) tel que $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I$.
Par définition : $A^{n+1} = A^n A$
On utilise l'hypothèse de récurrence.
et on obtient : $A^{n+1} = (u_n A + v_n I)\, A = u_n A^2 + v_n A$.
On utilise le résultat de la question 2. $A^2 = A + I$
il vient alors $A^{n+1} = u_n\,(A + I) + v_n A = u_n A + u_n I + v_n A = (u_n + v_n)\, A + u_n I$
Ainsi il existe un couple (u_{n+1}, v_{n+1}) tel que $A^{n+1} = u_{n+1}A + v_{n+1}I$
où $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$.
L'unicité de ce couple se déduit de la question 1.
Conclusion :
$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ il existe un unique couple de réels } (u_n, v_n) \text{ tel que } A^n = u_nA + v_nI}$

3. (a) Supposons que pour un certain entier naturel n, u_n et v_n soient positifs.
Or $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$ donc u_{n+1} et v_{n+1} sont également positifs.

(b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont positifs.
Pour achever la démonstration par récurrence il suffit de constater que $u_0 = 0, v_0 = 1$ sont bien deux réels positifs.
les questions 3.(a) et (b) permettent de conclure que :
$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n \text{ et } v_n \text{ sont positifs.}}$

4. (a) Montrons, pour tout entier naturel n, la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On a $u_{n+1} = u_n + v_n$ donc $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1}$
et de plus $v_{n+1} = u_n$
Donc on a $\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n}$

(b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
d'après la question précédente on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$
Or pour tout entier naturel n, u_n est positif donc pour tout entier n on a $u_{n+2} - u_{n+1} \geq 0$
ou encore pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $\quad u_{n+1} \geq u_n$
Il suffit alors de comparer u_1 et $u_0 = 0$ et on a montré que pour tout entier naturel n, u_n est positif donc on a bien $u_1 \geq u_0$
(Autre méthode : Par définition $A^1 = A = 1A + 0I$ donc $u_1 = 1$ et on retrouve $u_1 \geq u_0$)
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 0} \quad u_{n+1} \geq u_n}$
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Montrons que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc soit elle est convergente soit elle tend vers $+\infty$.
Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente et notons l sa limite.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+2} = l$
Ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} + u_n) = 2l$
Or $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$
L'unicité de la limite entraine alors $l = 2l$ donc $l = 0$.
De plus la suite étant croissante on a pour tout n supérieur ou égal à 1 $\quad u_n \geq u_1$
c-à-d $\quad u_n \geq 1$.
La limite satisfait aussi cette inégalité c-à-d $l \geq 1$ ce qui est incompatible avec $l = 0$.
L'hypothèse $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est donc impossible.
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

5. Montrons, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation : $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$
On a montré que tout entier naturel n, on a $A^n = u_n A + v_n I$
donc $\quad A^n = u_n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n & u_n \\ u_n & u_n + v_n \end{pmatrix}$
Or pour tout entier naturel n $\quad u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n$
donc pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $\quad v_n = u_{n-1}$
donc on a bien pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}}$

6. Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les relations :
$$u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2$$
$$u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1}$$
la question précédente donne en particulier $A^{2n} = \begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix}$

Or $A^{2n} = A^n A^n$

donc $\begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} u_{2n-1} & u_{2n} \\ u_{2n} & u_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n^2 + u_{n-1}^2 & u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} \\ u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1} & u_n^2 + u_{n+1}^2 \end{pmatrix}$

L'égalité de ces deux matrices entraine alors

la conclusion : $\boxed{u_{2n-1} = u_{n-1}^2 + u_n^2 \qquad u_{2n} = u_n u_{n-1} + u_n u_{n+1}}$

7. Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels quelconques, on pose : $d(M) = ad - bc$

(a) Soit $a, b, c, d, x, y, z, t,$ huit réels quelconques. On considère les deux matrices :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

$MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & bt + ay \\ cx + dz & dt + cy \end{pmatrix}$

donc par définition $d(MN) = (ax + bz)(dt + cy) - (bt + ay)(cx + dz) = adtx - bctx - adyz + bcyz$

(b) Montrons que $d(MN) = d(M) \times d(N)$

D'autre part $d(M) \times d(N) = (ad - bc)(xt - yz) = adtx - bctx - adyz + bcyz$

La question précédente et ce dernier résultat donnent alors : $\boxed{d(MN) = d(M) \times d(N)}$

(c) Montrons par récurrence, pour toute matrice M carrée d'ordre 2 et pour tout entier naturel n, la formule : $d(M^n) = [d(M)]^n$.

♠ Si $n = 0$ alors $M^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $d(M^0) = 1$

et si $[d(M)] \neq \mathbf{0}$ alors $[d(M)]^0 = 1$ et dans ce cas on a bien $d(M^0) = [d(M)]^0$

Sinon cette première étape ne peut être satisfaite et il faut étudier le cas $n = 1$

♠♠ Si $n = 1$ alors $d(M^1) = d(M) = [d(M)]^1$ l'égalité est satisfaite pour $n = 1$.

♠♠♠ Supposons que pour un entier n supérieur ou égal à 1on ait $d(M^n) = [d(M)]^n$ montrons alors que $d(M^{n+1}) = [d(M)]^{n+1}$

Or $d(M^{n+1}) = d(M^n \times M)$

On utilise le résultat de la question 7. (b) et on a alors $d(M^{n+1}) = d(M^n) \times d(M)$

On utilise l'hypothèse de récurrence et on obtient $d(M^{n+1}) = [d(M)]^n \times d(M)$

C'est-à-dire $d(M^{n+1}) = [d(M)]^{n+1}$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 1} \qquad d(M^n) = [d(M)]^n}$

8. Montrons, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la relation

$$u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n.$$

On a pour tout entier n supérieur ou égal à 1 $A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$

donc $d(A^n) = u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2$

De plus $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $d(A) = -1$ donc $[d(A)]^n = (-1)^n$

D'après la question précédente on a $d(A^n) = [d(A)]^n$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à 1} \qquad u_{n-1}u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n}$