

Programme de colle 01

Exercice 1

Soit la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 2 (Espace vectoriel)

Démontrer que F est un espace vectoriel avec

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } -x - y + z = 0 \\ \text{et } 2x - y + 5z = 0\}$$

Exercice 3 (Séries)

Calculer, sous réserve de convergence, la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + k + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Exercice 4 (VAR)

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée, c'est-à-dire pour laquelle, à chaque lancer, les apparitions de "pile" et de "face" sont équiprobables.

On admet que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par F_n l'événement "face apparaît au lancer de rang n " et par $\bar{F}_n$ l'événement "pile apparaît au lancer de rang n ".

Deux joueurs J et J' s'affrontent dans le jeu dont les règles sont les suivantes :

- le joueur J est gagnant si la configuration "pile, pile, face" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "face, pile, pile" n'apparaisse;
- le joueur J' est gagnant si la configuration "face, pile, pile" apparaît dans la suite des résultats des lancers, avant que la configuration "pile, pile, face" n'apparaisse;
- si l'un des joueurs est gagnant, l'autre est perdant.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par D_n l'événement "lors des n premiers lancers n'apparaissent jamais deux piles consécutifs" et par d_n sa probabilité.

- (a) Justifier les égalités $d_1 = 1$ et $d_2 = \frac{3}{4}$

- (b) En considérant les résultats des lancers de rang 1, 2 et 3, calculer d_3 .
- (c) À l'aide de la formule des probabilités totales et des événements disjoints F_1 et $\bar{F}_1 \cap F_2$, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

- (d) Montrer par récurrence double que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a l'inégalité :

$$d_n \leq 2 \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

2. On désigne par T la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang du lancer à l'issue duquel l'un des joueurs est déclaré gagnant, si cela se produit, et la valeur 0 si aucun des joueurs n'est gagnant.

Pour tout entier naturel non nul, l'événement $[T = 0] \cup [T > n]$ est donc réalisé si et seulement si aucune des deux configurations "pile, pile, face" ou "face, pile, pile" n'est apparue au cours des n premiers lancers.

- (a) Calculer les probabilités des événements $[T = 1]$, $[T = 2]$ et $[T = 3]$.
- (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Justifier l'égalité :

$$P([T > n] \cup [T = 0]) = \frac{1}{2^n} + d_n$$

- (c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4. Exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide des événements $[T > n - 1]$ et $[T > n]$. En déduire l'égalité :

$$P([T = n]) = \frac{1}{2^n} + d_{n-1} - d_n$$

3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on note G_n l'événement "le joueur J est déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n " et g_n la probabilité de G_n .

- (a) Calculer g_3 et g_4 .
- (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Quelle doit être la suite des résultats des n premiers lancers pour que le joueur J soit déclaré gagnant à l'issue du lancer de rang n ?

En déduire l'égalité suivante : $g_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Programme de colle 02

Cours

Définitions de famille de vecteurs libre, liée, génératrice.

Exercice 1 (Séries)

Calculer, sous réserve de convergence, la somme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k!} (-3)^k$$

Exercice 2 (Espace vectoriel)

Déterminer une famille génératrice de $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } -x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y + 5z = 0\}$.

Exercice 3 (Matrices)

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2, J^3 ; en déduire par récurrence J^k pour tout entier k de $\mathbb{N}^\times$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $A = aI + bJ$.
3. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on a l'égalité $A^n = 2^n I + \left(\frac{4^n - 2^n}{2}\right) J$.

Exercice 4 (VAR)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant "pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et "face" également avec la probabilité $\frac{1}{2}$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun "pile" pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier "pile".

1. (a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
- (b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $P(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
- (c) Vérifier que

$$\sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k) = 1$$

- (d) On rappelle que l'instruction "random(2)" renvoie un nombre au hasard parmi les nombres 0 et 1. Recopier et compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience décrite ci-dessus, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur ("pile" sera codé par le nombre 1 et "face" par 0).

```
Program TOTO ;
var k, n, z, lancer : integer ;
Begin
```

```
Randomize ;
Readln(n) ;
k := 0 ;
z := 0 ;
Repeat
  k := k + 1 ;
  lancer := random(2) ;
  If (lancer = 1) then ... ;
until (lancer = 1 or ... ) ;
Writeln (z) ;
end.
```

On dispose de $n + 1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante :

- si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages.
- Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.

3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité

$$P(X = i / Z = 0)$$

- (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité

$$P(X = i / Z = n)$$

- (c) Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle

$$P(X = i / Z = k)$$

4. (a) Montrer que

$$P(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$$

- (b) Montrer que

$$P(X = n) = \frac{1}{2^n}$$

- (c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, $P(X = i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.

5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que

$$\sum_{i=0}^n P(X = i) = 1$$

Programme de colle 03

Cours

Définitions de famille de vecteurs libre, liée, génératrice.

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln(1+3x)}{x^3 - 2x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)$$

Exercice 2

Soit la matrice

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E . Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E .

3. Déterminer une base de E et vérifier que $\dim E = 4$.

Exercice 3

I. Puissances successives de la matrice:

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b , on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.

2. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

3. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.

(a) Montrer qu'il existe un réel α , que l'on exprimera en fonction de a , tel que :

$$M(a) = P + \alpha Q$$

(b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2 .

(c) Pour tout entier naturel n , non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit comme combinaison linéaire de P et Q .

(d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

II. Évolution d'un titre boursier au cours du temps.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1 , et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

(a) Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1 .

(b) Étudier la convergence de ces suites.

2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :

- le premier jour le titre est stable ;
- si un jour n , le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
- si un jour n , le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
- si un jour n , le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On note M_n (respectivement S_n , respectivement B_n) l'événement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n ."

- (a) Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n .
- (b) En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n .
- (c) Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Programme de colle 04

Cours

Donner la définition d'une base et de la dimension d'un espace vectoriel.

Exercice 1 (Cours)

Déterminer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \ln(1+3x)}{x^3 - 2x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)$$

Exercice 2 (Espaces vectoriels)

Montrer que P est un sous-espace vectoriel :

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel qu'il existe } (u, v) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= 2u + v \\ z &= u + v \end{cases}$$

Exercice 3

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

Première Partie

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et I la matrice unité de taille 3.

1. On pose $J = M - I$.

(a) Calculer J^2 en fonction de J .

(b) Montrer par récurrence qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que pour tout entier naturel n on ait:

$$M^n = I + u_n J.$$

Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

(c) Déterminer u_n en fonction de n .

2. Ecrire M^n pour tout entier naturel n .

Deuxième partie

Les poules pondent des oeufs que l'on classe suivant trois calibres A, B et C (les petits les moyens et les gros).

- Si une poule pond un oeuf de calibre A , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $1/2, 1/4$ et $1/4$.
- Si une poule pond un oeuf de calibre B , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $1/4, 1/2$ et $1/4$.
- Si une poule pond un oeuf de calibre C , l'oeuf qu'elle pondra ensuite sera de calibre A, B ou C avec des probabilités respectives de $1/4, 1/4$ et $1/2$.
- Pour n entier naturel non nul, on désigne par a_n, b_n et c_n les probabilités respectives pour que le n ème oeuf pondu par une poule soit de calibre A, B ou C .

On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

- (a) Calculer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n . En déduire une matrice carrée U telle que $X_{n+1} = U.X_n$ pour tout entier n .
(b) Exprimer U en fonction de M . En déduire U^n en fonction de n .
- On suppose que le premier oeuf pondu par une poule est de calibre C .

Déduire des questions précédentes a_n, b_n et c_n en fonction de n , ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Programme de colle 05

ESSEC III 2008

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p .

Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$, pour chaque $n > 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k , $k \in \mathbb{N}^*$

En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{\text{ième}}$ pari.

On a ainsi l'encadrement : $0 \leq M_{n+1} \leq C_n$ pour tout entier n .

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\frac{1}{2} < p < 1$.

I. Quitte ou double

- Déterminer deux réels a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)M_{n+1}$.
- Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, E(C_n) = C_0 + (2p-1) \sum_{k=1}^n E(M_k)$
En déduire que pour maximiser $E(C_n)$ il faut miser tout son capital à chaque pari.
- Montrer que cette stratégie, dite du "quitte ou double", conduit de façon quasi-certaine à la ruine du joueur, et déterminer le nombre moyen de parties conduisant à la ruine (on parle de ruine s'il existe un entier naturel n pour lequel $C_n = 0$).

II. Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1} = \alpha C_n$, avec $\alpha \in]0, 1[$ (indépendant de n)

- Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n$.
- On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.
Que représente la variable aléatoire S_n ? Déterminer la loi de S_n et son espérance.
- Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = (1+\alpha)^{S_n} (1-\alpha)^{n-S_n} C_0$.
- Montrer que : $E\left[\frac{1}{n} \ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] = p \ln(1+\alpha) + (1-p) \ln(1-\alpha)$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = p \ln(1+x) + (1-p) \ln(1-x)$

- Étude de f .
 - Étudier les variations de f sur $]0, 1[$, et montrer que f est concave.
Montrer que f admet un maximum sur $]0, 1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p .
 - Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.
 - Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0, 1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
 - Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 1[$
- Conclusion: le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme. Que donnerait l'expression de α_K dans les cas limites $p = \frac{1}{2}$ et $p = 1$?
Interpréter ces deux résultats.

IV. Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$.

On considérera dans ce qui suit que α , est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

- On définit la fonction φ sur $]0, 1[$ par $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.
 - Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$ On notera encore φ ce prolongement.
 - Justifier que φ est dérivable sur $]0, 1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2) [\ln(1-x)]^2}$$

- Déterminer les variations de h sur $]0, 1[$.
 - Montrer que φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle à préciser.
- Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
On commencera par donner le développement limité en 1 à l'ordre 2 de la fonction $\ln$.
 - (a) Établir: $\forall p \in]\frac{1}{2}, 1[, \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$

- (b) En déduire que α_c , est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha'_c \left(\frac{1}{2} \right) = 4$$

- (c) Établir l'équivalence, au voisinage de $\frac{1}{2}$:

$$\alpha_c \sim 2\alpha_K$$

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.

Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \frac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

V Simulation informatique

Le programme `kelly1` qui suit, écrit en langage Pascal, permet d'illustrer ce qui précède:

- le capital initial est fixé à 100;
- en entrée, le programme demande la valeur de p , la valeur de α à utiliser et le capital que l'on souhaite atteindre;
- en sortie, le programme renvoie le nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé.

```
program kelly1 ;
var   n : integer;
cap, cap_obj,u,p,alpha   :   real;
begin
    writeln('valeur de p : '); read (p);
    writeln ( ' objectif à atteindre : ');
read (cap_obj) ;
```

```
writeln( 'valeur de alpha :'); read(alpha);
cap:=100;
n:=0;
randomize ;
while ***** do
begin
    u:=random;
    if u<p then
begin ***** end
    else
begin ***** end;
*****
end;
writeln ( ' nombre_de_parties_jouées_ :
',n);
writeln( ' capital_atteint_: ' cap)
end.
```

1. Compléter les quatre lignes d'instructions manquantes.
2. Afin de vérifier que la stratégie de Kelly est optimale, on modifie le programme `kelly1` de la façon suivante :

- les entrées restent les mêmes;
- le nouveau programme calcule la valeur de Kelly α_K ;
- en sortie, le nouveau programme renvoie, en plus du nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé, le capital que l'on aurait obtenu si on avait choisi la valeur α_K à la place de α pendant ces mêmes parties.

Écrire le programme `kelly2` qui réalise ces modifications, uniquement en insérant des nouvelles instructions au programme `kelly1`.

Programme de colle 06

Exercice 1 (Cours)

1. Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Définition de f continue en a .
2. Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. Définition de f dérivable en a .

Exercice 2

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 (INSEECOM 2002)

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

A chaque partie un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12 ; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possédant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
 - S'il perd à la $n^{\text{ième}}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{\text{ième}}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.
1. On note p_n la probabilité de l'événement A_n : " le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie".

- (a) Calculer les probabilités conditionnelles $p(A_{n+1}/A_n)$ et $p(A_{n+1}/\bar{A}_n)$, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}$$

- (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$
2. Soit $k \in [[1; n]]$, on note B_k l'événement : "le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{\text{ième}}$ partie"
 - (a) A l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $p(B_n)$
 - (b) Soit $k \in [[1; n-1]]$, calculer $p(B_k)$
 - (c) En déduire la probabilité q_n pour que le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 4 (ESC 2003 T)

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α .
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie B

1. Rappeler $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0. Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4. (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
(b) En déduire le tableau de variations de f , en y faisant apparaître le réel α défini au A,3).

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$.
(b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).
(c) En déduire que la suite est convergente (sa limite est étudiée dans les questions suivantes).
2. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0.
On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
 - (a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
 - (b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
 - (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.
3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Programme de colle 07

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une application linéaire.
2. Définition du noyau d'une application linéaire.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 3.

On note e_0, e_1, e_2, e_3 les fonctions définies, pour tout réel x par

$$e_0(x) = 1$$

$$e_1(x) = x$$

$$e_2(x) = x^2$$

$$e_3(x) = x^3$$

et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

Soit f l'application qui à tout polynôme P de E associe le polynôme $Q = f(P)$, défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \frac{1}{2} (P(x+1) + P(x))$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de e_0, e_1, e_2 et e_3 .
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 3 (EML 1992)

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

2. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et $N - 2$ boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement les N boules sans remettre les boules tirées dans l'urne.

On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

- (a) Soient i et j deux entiers compris entre 1 et N .

Calculer la probabilité P_{ij} pour que $X_1 = i$ et $X_2 = j$.

(On distinguera le cas $i = j$ et le cas $i \neq j$).

- (b) Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2 .

Est-ce que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ?

Calculer les espérances et variances des variables aléatoires X_1 et X_2 .

- (c) On note X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'on obtient pour la première fois soit la boule blanche soit la boule verte.

On note Y la variable aléatoire égale au rang du tirage à partir duquel on a obtenu la boule blanche et la boule verte.

Remarque : en fait $X = \inf(X_1, X_2)$ et $Y = \sup(X_1, X_2)$

Par exemple, si on a tiré rouge, rouge, verte, rouge, blanche, alors $X_1 = 5$ et $X_2 = 3$ et $X = 3$ et $Y = 5$

Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y .

Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y .

Programme de colle 08

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une application linéaire.
2. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2 (bijection)

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0; a]$ par :

$$\forall x \in [0; a], \quad f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$$

1. (a) Justifier la dérivabilité de f_a sur $[0; a]$ et calculer sa dérivée.
En déduire le tableau des variations de f_a en précisant les valeurs aux bornes.
- (b) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0; a]$ sur $[0; \frac{1}{a}]$.
- (c) On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.
Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.
- (d) Montrer que

$$f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$$

2. (a) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a f_a(x)dx$, notée I_a .
- (b) Déterminer deux constantes α et β telles que :

$$\forall x \in [0; a], \quad \frac{1-x}{1+x} = \alpha + \frac{\beta}{1+x}$$

En déduire que $I_1 = 2 \ln 2 - 1$.

- (c) Montrer grâce au changement de variable

$$x = au$$

que $I_a = I_1$.

Exercice 3

On note B_C la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique B_C .

On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique B_C .

1. Calculer $(A - 2I)^2$ puis vérifier que $(A - 2I)^3 = 0_3$ (matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$).
2. Montrer par une méthode du pivot que P est inversible si et seulement si $y \neq -1$.
3. On note dans toute la suite les vecteurs : $u_1 = (0, 4, 4)$ et $u_2 = (2, 0, 2)$.
 - (a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1, y, 0)$ tel que : $f(u_3) = u_2 + 2u_3$.
 - (b) Donner la matrice de passage P de la base B_C à la famille $B' = (u_1, u_2, u_3)$.
Montrer à l'aide de la question 2 que P est inversible puis justifier que la famille B' est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1 , puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2 .
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base B' est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A , T , P et P^{-1} .

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $[R]$

$$[R] : f \circ h = h \circ f$$

4. (a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base B' .
Montrer que :

$$[R] \iff (NM' = M'N)$$

- (b) En posant

$$M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

montrer que :

$$[R] \iff M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

- (c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que

$$S = \text{vect}(id, f - 2id, (f - 2id)^2)$$

- (d) On note $G = (I, N, N^2)$. Montrer que G est libre et en déduire la dimension de S .
On note $F' = (id, f, f^2)$. Montrer que F' est une base de S .

Programme de colle 09

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une application linéaire.
2. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2 (Applications linéaires)

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit $u_1 = e_1 + e_2$.
Calculer les coordonnées de $f(u_1)$ dans la base B .
2. On considère les éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$u_2 = pe_2 + qe_3$$

$$u_3 = re_1 + se_3$$

où p, q, r, s sont des réels.

Déterminer u_2 et u_3 pour que :

$$f(u_2) = u_1 + u_2 \quad \text{et} \quad f(u_3) = 2u_2 + u_3$$

3. Vérifier alors que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Ecrire la matrice A' de f dans la base B' .
5. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
6. Calculer A'^{-1} .
7. En déduire A^{-1} .

Exercice 3 (Bijection)

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = 2xe^x$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.
2. On note f^{-1} la bijection réciproque de f . Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1} .
3. Vérifier qu'il existe dans $[0; 1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.
Montrer que $\alpha \neq 0$.

Exercice 4

On pose pour tout entier naturel non nul n :

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

et $I_0 = e - 1$.

1. Donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n>0}$.
2. Montrer que $\forall n > 0, \quad I_n \geq 0$.
3. Etablir, pour tout entier naturel n non nul,

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

4. Dédire des questions précédentes que $\forall n > 0$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

5. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
6. A l'aide de la question 3, montrer que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}$$

Programme de colle 10

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une application linéaire.
2. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2

On considère les deux matrices carrées réelles d'ordre quatre suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les questions 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

1. (a) Calculer K^2 .
(b) En déduire que la matrice K est inversible et déterminer K^{-1} .
2. Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par $M = aI + bK$.
(a) Montrer que : $M^2 = -(a^2 + b^2)I + 2aM$.
(b) En déduire que, si $(a, b) \neq (0, 0)$, alors la matrice M est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de I et M .
(c) Application : donner l'inverse de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ associé à la matrice K relativement à la base $\mathcal{B}$. On considère les quatres éléments suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = e_1, \quad v_2 = f(e_1), \quad v_3 = e_3, \quad v_4 = f(e_3).$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- (b) Exprimer $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4 et en déduire la matrice K' associée à f relativement à la base $\mathcal{C}$.

- (c) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.
- (d) Rappeler l'expression de K' en fonction de K, P et P^{-1} .

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + 2 - 2 \ln(e^x + 1)$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Etude de la fonction f.

1. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
3. Etudier le signe de f' et donner les variations de f .
4. Déterminer la solution, notée α , de l'équation $f(x) = x$.
5. Montrer que pour tout x réel : $f''(x) = -2 \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
6. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{e-1}{e+1}$

Convergence de la suite (u_n) .

On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :

$$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0,37 \quad \ln(e-1) \simeq 0,54$$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{e+1}\right)^n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Programme de colle 11

Exercice 1

Soit

$$F(x) = \int_5^x \sqrt{t^2 - 3t + 2} dt$$

1. Donner le domaine de définition de F .
2. Quelles sont les variations de F sur $\mathcal{D}_F$?
3. Montrer que

$$\forall t \geq 2, \quad \sqrt{t^2 - 3t + 2} \geq t - 2$$

4. En déduire une minoration de F et calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

5. Justifier que

$$\forall t \geq 2, \quad \sqrt{t^2 - 3t + 2} \leq t$$

puis en déduire un encadrement de F .

6. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 2 (ESCP 92)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Étudier la suite $(f_k(0))_{k \geq 0}$ de nombres réels. En déduire, pour tout nombre réel positif x fixé la limite de la suite $(f_k(x))_{k \geq 0}$.
2. (a) Soit x un nombre réel strictement positif. Établir que

$$f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$$

pour tout $k \geq 0$.

- (b) Expliciter les fonctions f_0 , f_1 et f_2 .
- (c) Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f_0(x) \sim 1/x.$$

- (d) À l'aide de la relation établie au c), montrer que pour tout k , lorsque x tend vers $+\infty$:

$$f_k(x) \sim \frac{k!}{x^{k+1}}$$

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout réel x strictement positif :

$$f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$$

En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

- (b) Trouver une relation simple entre f'_k et f_{k+1} .
- (c) Montrer que pour tout réel y positif ou nul :

$$1 - e^{-y} \leq y$$

En déduire que pour tout entier naturel k , la fonction f_k est continue en 0.

Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 3

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels

1. Soit $A \in \mathcal{M}$, on pose $A = (a_{i,j})$
 $a_{i,j}$ désigne le terme de la matrice situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Soit f l'application de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}, \quad f : A = (a_{i,j}) \mapsto f(A) = \sum_{i=1}^2 a_{i,i}$$

- 1) Montrer que f est linéaire et que $\forall A \in \mathcal{M}, \quad \forall B \in \mathcal{M}, \quad f(AB) = f(BA)$.
- 2) Soit $E = \{A \in \mathcal{M} \text{ telles que } f(A) = 0\}$.
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$.
- 3) Déterminer 3 matrices J, K, L appartenant à $\mathcal{M}$ telles que (J, K, L) constituent une base de E .
- 4) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}$ semblables alors $f(A) = f(B)$.

2. Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < a < 1 \text{ et } 0 < c < 1$$

Soit $A \in F$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 1-a & 1-c \end{pmatrix}$ et soit $P = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -1 & 1-a \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $P^{-1}AP$.
- 2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad A^n \in F$.
- 3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & w_n \\ v_n & z_n \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer les limites des suites $(u_n), (v_n), (w_n), (z_n)$.
 - b. Soient u, v, w, z les limites respectives de ces quatre suites.
Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} u & w \\ v & z \end{pmatrix}$ est un élément de F

Programme de colle 12

Exercice 1

Soit f définie par

$$f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$$

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
2. Déterminer la parité de f .
3. Calculer f' sur $]0, +\infty[$ et déterminer le signe de $f'(x)$ lorsque $x > 0$.
4. Donner un encadrement de

$$t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$$

sur $[x, 2x]$ lorsque $x > 0$.

5. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f$$

6. Montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2 \ln x}$$

7. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$ et construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.
2. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

3. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f .
4. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
5. Dans cette question on s'intéresse aux solutions de l'équation matricielle $M^3 = A$ où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

(a) Montrer que si M vérifie la relation $M^3 = A$ alors $MA = AM$.

(b) On note

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si la matrice M vérifie la relation $M^3 = A$, déduire de la question précédente que X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de M .

(c) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D' d'ordre 3 telle que $M = PD'P^{-1}$. Quelle relation a-t-on entre les matrices D' et D ?

(d) Conclure.

Programme de colle 13

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une valeur propre.
2. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation d'un endomorphisme.

Exercice 2 (T ESC 2001)

Partie 1

Soit f la fonction définie pour tout x réel par: $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2})e^{-x}$
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Etudier les branches infinies de C_f .
3. Déterminer la fonction dérivée f' de f et dresser le tableau de variations de f .

Partie 2

M désigne un nombre réel positif, n un entier naturel.

On définit l'intégrale : $I_n(M) = \int_0^M x^n e^{-x} dx$, en convenant

$$\text{que } I_0(M) = \int_0^M x^0 e^{-x} dx = \int_0^M e^{-x} dx$$

1. Calculer $I_0(M)$
2. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente. On note I_0 sa valeur.
3. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $I_{n+1}(M)$ et $I_n(M)$.
4. En déduire, à l'aide d'une récurrence, que pour tout entier naturel n , l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ est convergente, de valeur $I_n = n!$.

Exercice 3

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$ et de $\text{Ker}(f)$.
2. On considère la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

3. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f .
4. En déduire l'existence d'une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.
5. Dans cette question on s'intéresse aux solutions de l'équation matricielle $M^3 = A$ où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

(a) Montrer que si M vérifie la relation $M^3 = A$ alors $MA = AM$.

(b) On note

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si la matrice M vérifie la relation $M^3 = A$, déduire de la question précédente que X_1, X_2, X_3 sont des vecteurs propres de M .

(c) En déduire l'existence d'une matrice diagonale D' d'ordre 3 telle que $M = PD'P^{-1}$. Quelle relation a-t-on entre les matrices D' et D ?

(d) Conclure.

Programme de colle 14

Exercice 1 (Cours)

1. Définition d'une valeur propre.
2. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation d'un endomorphisme.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$$

1. (a) Montrer que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est paire.
(b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
(c) Pour tout réel t , calculer $f'(t)$ et étudier son signe.
En déduire le tableau des variations de f .
(d) Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f .

2. (a) Vérifier que pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

- (b) On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

- (c) En déduire la nature et la valeur des intégrales impropres suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t) dt, \quad J = \int_{-\infty}^0 f(t) dt,$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt,$$

3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

A l'aide de la question 2.b., montrer que :

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Exercice 3

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$\text{et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout réel } x : R_0(x) = 1, R_1(x) = x - 1$$

$$\text{et } R_2(x) = (x-1)^2$$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1} . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$

Programme de colle 15

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition.
3. Calculer $P(|X| > 0,5)$

Exercice 2

Soit λ un réel strictement positif.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition.
3. La variable aléatoire X est associée à la durée de vie d'un objet en jours. Calculer la probabilité qu'il dure plus de 30 jours sachant qu'il est toujours intact au bout de 10 jours.

Exercice 3

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ est convergente et calculer sa valeur.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.

- (a) Déterminer la fonction de répartition de X .
- (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3 , chacune de même loi que X .

4. On considère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$

- (a) Déterminer la fonction de répartition G de U .
- (b) Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U .

5. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (V \leq t) = (T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t)$$

- (a) Déterminer la fonction de répartition H de V .
- (b) Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V .

Programme de colle 16

Exercice 1

Donner la définition d'une densité de probabilité.

Exprimer en fonction de f la densité de X puis en fonction de F la fonction de répartition de X les probabilités suivantes :

- $P(X \leq b)$
- $P(X > a)$
- $P(a \leq X \leq b)$

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition.
3. Calculer $P(|X| > 0,5)$

Exercice 3

Soit λ un réel strictement positif.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2. Déterminer l'expression de la fonction de répartition.

3. La variable aléatoire X est associée à la durée de vie d'un objet en jours. Calculer la probabilité qu'il dure plus de 30 jours sachant qu'il est toujours intact au bout de 10 jours.

Exercice 4

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ est convergente

et calculer sa valeur.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

2. Montrer que f définit une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f pour densité.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
On considère trois variables aléatoires indépendantes T_1, T_2 et T_3 , chacune de même loi que X .
4. On considère la variable aléatoire $U = \inf(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U > t) = (T_1 > t) \cap (T_2 > t) \cap (T_3 > t)$$
 - (a) Déterminer la fonction de répartition G de U .
 - (b) Montrer que U admet une densité et déterminer une densité g de U .
5. On considère la variable aléatoire $V = \sup(T_1, T_2, T_3)$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (V \leq t) = (T_1 \leq t) \cap (T_2 \leq t) \cap (T_3 \leq t)$$
 - (a) Déterminer la fonction de répartition H de V .
 - (b) Montrer que V admet une densité et déterminer une densité h de V .

Programme de colle 17

Exercice 1 ESSEC 2004

On considère une urne composée de boules blanches et de boules rouges, mais dont la composition exacte est inconnue. Supposons qu'après avoir effectué n tirages au hasard avec remise dans cette urne, soit obtenu un total de r boules rouges. Il semble alors raisonnable de penser que la proportion initiale de boules rouges est proche de $\frac{r}{n}$. Le problème qui suit propose une étude de cette situation.

I. Etude d'une loi de probabilité conditionnelle

Dans cette partie, N , n et r désignent des entiers tels que : $N \geq 2$, $n \geq 1$, $0 \leq r \leq n$.

On considère $N + 1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_N$ telles que, pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N , l'urne U_k soit composée de k boule(s) rouge(s) et de $N - k$ boule(s) blanche(s). On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors n tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. (a) Soit k un entier compris au sens large entre 0 et N .
Quelle est la loi de R conditionnée par l'événement $(U = k)$?
- (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'égalité :

$$P(R = r) = \frac{\binom{n}{r}}{N + 1} \sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-r}.$$

2. Soit i un entier compris au sens large entre 0 et N .
Démontrer :

$$P_{R=r}(U = i) = \frac{\left(\frac{i}{N}\right)^r \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{n-r}}{\sum_{k=0}^N \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-r}}.$$

3. Soient p un réel de $[0; 1]$ tel que pN soit un entier naturel et Y_N la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges dans l'urne choisie initialement parmi les $N + 1$ urnes.
 - (a) Écrire l'événement $(Y_N \leq p)$ à l'aide de la variable aléatoire U .
Déterminer alors l'expression de $P(Y_N \leq p | R = r)$ en fonction de N , n , r et p .
 - (b) En déduire, à l'aide du théorème sur les sommes de Riemann :

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ pN \text{ entier naturel}}} P_{R=r}(Y_N \leq p) = \frac{\int_0^p t^r (1-t)^{n-r} dt}{\int_0^1 t^r (1-t)^{n-r} dt}$$

II. Loi de probabilité bêta

Dans toute cette partie, a et b désignent des réels supérieurs ou égaux à 1.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$. On notera dorénavant $B(a, b)$ cette intégrale.
2. (a)
 - Démontrer l'égalité : $B(a+1, b) + B(a, b+1) = B(a, b)$.
 - A l'aide d'une intégration par parties, prouver : $B(a, b+1) = \frac{b}{a} B(a+1, b)$.
 - Des deux relations précédentes, déduire la formule : $B(a+1, b) = \frac{a}{a+b} B(a, b)$.
- (b) Calculer $B(1, b)$, puis exprimer explicitement $B(a, b)$ en fonction de a et b dans le cas où a et b sont entiers.
- (c) Écrire un programme en langage Pascal permettant de calculer et d'afficher la valeur de $B(a, b)$, les entiers naturels non nuls a et b étant saisis au clavier par l'utilisateur.

3. On revient au cas général où a et b sont des réels supérieurs ou égaux à 1, non nécessairement entiers.

C désignant un nombre réel, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = Cx^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Démontrer que, pour une certaine valeur de la constante C à déterminer, la fonction f est une densité de probabilité (c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$). On supposera dorénavant C ainsi fixée.

On dit alors qu'une variable aléatoire de densité f suit la loi de probabilité bêta de paramètres a et b .

- (b)
- Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0, 1[$.
Justifier que, si a et b sont distincts de 1, alors, sur $]0, 1[$, f' s'annule en un réel et un seul.
 - Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 en discutant selon la valeur de a .
 - Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans chacun des deux cas

$$\begin{cases} 1 < a < 2 \\ b > 2 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a > 2 \\ b = 2. \end{cases}$$

(c) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé et admettant pour densité f .

- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X .
- Démontrer que X admet une variance égale à $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

III. Conclusion

Considérons à nouveau une urne composée de boules blanches et de boules rouges, dont la composition exacte est inconnue. On peut traduire cette ignorance en supposant que la variable aléatoire égale à la proportion de boules rouges de cette urne suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Cela revient à faire tendre dans la partie I. le nombre d'urnes vers l'infini.

En reprenant la situation et les notations de la partie I., et en admettant, dans la question 3. b) de cette partie, que le calcul de limite reste valable que pN soit un entier naturel ou pas, montrer que la suite des variables Y_N sachant $(R = r)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de probabilité bêta dont on déterminera les paramètres puis l'espérance.

Programme de colle 18

Exercice 1

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{5^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$

Exercice 2

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B .

On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

- Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.
 - Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.
 - Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?
- Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBBA \dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A , les jours 3, 4 et 5 il a choisi le serveur B , et le jour 6 le serveur A . Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB \dots$). On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série. Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jour suivant l'autre serveur.

- (a) Justifier soigneusement la formule :

$$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

- (b) Vérifier par le calcul que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

- (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1 .
 (d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2) .

- (e) En déduire la loi de L_2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

- Déterminer la loi de N_n , son espérance mathématique et sa variance.
- Déterminer la loi de T_1 , son espérance mathématique et sa variance.
- Montrer que

$$\forall k \geq 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2(0.3)^{k-2}$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Le prix en euros W de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

- Rappeler une densité f_Z de Z ainsi que sa fonction de répartition F_Z .
- Quel est le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A ?
- Exprimer W en fonction de Z .
- Montrer que W est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité f_W
- Déterminer l'espérance de la variable W .

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est représenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
- Calculer l'espérance de la variable X .

Programme de colle 19

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x \ln(x)} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $[1; +\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[1; +\infty[$.
4. f est-elle de classe C^1 sur $[1; +\infty[$?

Exercice 2

ECRICOME 2008

1. Deuxième jeu

Pour ce deuxième jeu, le participant lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3 .

- (a) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i .
- (b) Déterminer l'espérance de X_i .
- (c) Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t .
- (d) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M .
- (e) Quelle est la probabilité de l'événement $G =$ "le joueur gagne la partie" ?

Exercice 3

EDHEC 1998

1. On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\times$ par $g(x) = \ln x + 2x + 1$
 - (a) Etudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
 - (b) En déduire qu'il existe un unique réel α , élément de $]0, \frac{1}{e}[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2. On considère la fonction de deux variables réelles f définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \quad f(x, y) = x(\ln x + x + y^2)$$

- (a) Déterminer le seul point critique de f , c'est à dire le seul couple de $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ en lequel f est susceptible de présenter un extremum.
- (b) Vérifier que f présente un minimum relatif m en ce point.
- (c) Montrer que $m = -\alpha(\alpha + 1)$

Programme de colle 20

Exercice 1

Soit la fonction f de $] -1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - \ln(1+2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le développement limité à l'ordre deux en zéro de f
2. En déduire que f est dérivable en zéro.

Exercice 2

On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et y strictement positifs, par :

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G .
2. Rechercher les extrema éventuels de la fonction G dans le domaine $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Exercice 3

Ce problème est consacré à l'étude de la loi de Pareto (Vilfredo Pareto 1848-1923).

La première partie étudie les propriétés de cette loi. On montre ensuite, sur un exemple, comment elle permet de modéliser de façon très satisfaisante des phénomènes rencontrés en démographie. Les revenus d'une population sont aussi très bien modélisés par une loi de Pareto, et on compare deux modes de calcul d'impôts sur des revenus suivant une loi de Pareto. La seconde partie est l'étude de l'indice d'inégalité de Gini dans le cas d'une loi de Pareto.

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont à valeurs réelles.

Dans tout le problème α et x_0 désignent deux nombres réels strictement positifs.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi de Pareto de paramètres α et x_0 si X , à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, admet pour densité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \forall x < x_0 \\ f(x) = \alpha \frac{x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \forall x \geq x_0 \end{cases}$$

On écrit alors que X suit $VP(\alpha, x_0)$.

A. Quelques résultats probabilistes.

1. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0)$.
 - (a) Vérifier que f est bien une fonction de densité.
 - (b) Déterminer la fonction de répartition F de X et calculer, pour $x \geq x_0$, $\ln(1 - F(X))$ en fonction de $\ln(x)$. On rappelle que $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

2. Soit X une variable aléatoire suivant $VP(\alpha, x_0)$.
 - (a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance et la calculer dans ce cas.
 - (b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance et la calculer dans ce cas.
3. Soient une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$ et $\lambda > 0$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \lambda X$. Quelle loi reconnaît-on ?
4. Soit une variable aléatoire W qui suit une loi exponentielle de paramètre $\beta > 0$ c'est à dire que W admet une densité de probabilité g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 0 & \forall x < 0 \\ g(x) = \beta e^{-\beta x} & \forall x \geq 0 \end{cases}$$

Soient k un nombre réel strictement supérieur à 1 et x_0 un nombre réel strictement positif. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $T = x_0 k^W$. Quelle loi reconnaît-on ?

5. Soit une variable aléatoire X suivant $VP(\alpha, x_0)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sqrt{X}$.

B. Propriété caractéristique de la loi de Pareto.

Soient une variable aléatoire X de densité f , admettant une espérance, et un nombre réel x tel que $\int_x^{+\infty} f(t) dt \neq 0$.

On appelle moyenne de X sur $[x, +\infty[$ le nombre réel $M(x)$ égal à $\frac{\int_x^{+\infty} t f(t) dt}{\int_x^{+\infty} f(t) dt}$.

1. Montrer que $M(x) \geq x$.
2. Dans cette question on suppose que la variable X suit $VP(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$. Calculer $M(x)$ pour $x \geq x_0$.
3. Réciproquement soient un nombre réel x_0 strictement positif et une variable aléatoire X à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité f continue et à valeurs strictement positives sur $[x_0, +\infty[$, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ tel que : $M(x) = kx \forall x \geq x_0$.

On se propose d'établir que X suit une loi de Pareto à deux paramètres. On pose, pour $x \geq x_0$, $G(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$, et $H(x) = \int_x^{+\infty} t f(t) dt$.

- (a) Montrer que G et H sont dérivables sur $[x_0, +\infty[$ et calculer leur dérivée.
- (b) Prouver que $G(x) = \frac{1-k}{k} x G'(x)$ pour $x \geq x_0$.
- (c) Pour $x \geq x_0$, on pose $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$. Calculer $I'(x)$ et en déduire la valeur de $G(x)$.
- (d) En déduire que X suit $VP\left(\frac{k}{k-1}, x_0\right)$.