Chapitre 7

Intégrales

7.1 Calcul d'intégrales

Exercice 7.1- 1

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

1. $A = \int\limits_{e}^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma$
2. $B = \int\limits_{1}^{4} \sqrt{3s} \ln s \, ds$
3. $C = \int\limits_{1/2}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ avec le changement de variable $t = \frac{x}{x+1}$

7.2 Fonction définie par une intégrale

Exercice 7.2- 1

On considère la fonction

$$F(x) = \int\limits_{2}^{x} \frac{s^2}{s^2-1} ds$$

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_F$ et expliciter F'.

2. Etablir que $\forall s \geqslant 1$,

$$\int_2^x 1\, ds \leqslant F(x) \leqslant \int_2^x \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) ds$$

En déduire les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

Exercice 7.2- 2

Soient f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

et (u_n) la suite de nombres réels déterminée par :

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^1 f(x)\, dx \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\, dx \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f, relativement à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Etude de f.

1. Montrer que la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$
3. Déterminer la lmite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$
6. Montrer que f rélaise une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
7. Pour tout y de l'intervalle $]0, 1]$, déterminer l'unqiue réel x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$ tel que :
$$f(x) = y$$
8. Déterminer alors la bijection réciproqie f^{-1}

Calcul d'aire On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie par :

$$F(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Pour tout réel λ strictement positif, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine constitué par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\lambda \leq x \leq 2\lambda \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x)$$

ainsi

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_\lambda^{2\lambda} f(x)\, dx$$

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2+1} > 0$$
En déduire l'ensemble de définition de F.
2. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que F est impaire sur son ensemble de définition.
4. Déterminer la limite de F lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de F quand x tend vers $-\infty$
5. Exprimer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ et calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Etude de la suite (u_n).

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Effectuer une intégrationpar parties et calculer u_3. (On pourra remarquer que $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$)
3. Déterminer le sens de variations de la suite (u_n)..
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On ne cherchera pas sa limite dans cette question)
5. Justifier l'encadrement suivant :
$$\forall x \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$$
en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

7.3 Suite d'intégrales

Exercice 7.3- 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, minorée par 0.
2. En déduire qu'elle converge.
3. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1.
4. En déduire que la limite de $(I_n)_n$ est 0.

5. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$,
$$(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$
6. En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right)_n$ et donner sa limite.

Exercice 7.3- 2

Soit n un entier naturel non nul.
On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_n(x) = x \exp\left(-\frac{n}{x}\right) \textit{ si } x \neq 0 \textit{ et } f_n(0) = 0$$

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.
2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.
   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variation de f_n.
3. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que
$$f_n(u_n) = 1$$
   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^{\times}$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation :
$$x \ln(x) = n$$
   (c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$
   (d) Justifier la relation
$$\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$$
   puis montrer que
$$\ln u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln n$$
4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.
   (b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$.
5. On pose
$$I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$$

(a) Montrer que :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leqslant \exp(\frac{1}{u_{n+1}})$$

(b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Exercice 7.3- 3 T ESCP 2010

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction h_n sur $[0, 1]$ par la relation suivante : pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$h_n(x) = \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} \text{ si } n \geq 1$$

$$h_0(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

1. (a) Établir pour tout réel x de $[0, 1]$, l'inégalité : $x^2 + 3x + 2 \geq 2$.

   (b) En déduire que la fonction h_n est continue sur $[0, 1]$ pour tout entier n.

2. On définit pour tout x de $[0, 1]$ la fonction g par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

On pose pour tout entier naturel n,

$$u_n = \int_0^1 h_n(t)\partial t$$

   (a) On note g' la dérivée de g. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, on a : $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

   (b) En déduire que $u_0 = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

3. On définit pour tout x de $[0, 1]$, la fonction k par

$$k(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$$

   (a) Soit k' la dérivée de k. Calculer pour tout x de $[0, 1]$, $k'(x)$. En déduire la valeur de $2u_1 + 3u_0$.

   (b) Donner la valeur de u_1.

4. Calculer $u_2 + 3u_1 + 2u_0$. En déduire la valeur de u_2.

5. (a) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité suivante : $u_n \geq 0$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

   (c) Établir pour tout entier naturel n, l'inégalité : $u_n \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$.

   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

6. (a) Calculer pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2u_n$ en fonction de n.

(b) En utilisant la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, en déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{6(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{6(n-1)}$$

(c) Déterminer la limite de nu_n quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 7.3- 4 T HEC 2007

Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n par la relation suivante, valable pour tout réel x :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

2. (a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$, et en déduire la valeur de u_0.

   (b) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$, et en déduire la valeur de u_1.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire qu'elle est convergente. On note l sa limite.

4. (a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(1 - e^{-n+1}\right)$$

   (b) En déduire la valeur de l.

5. (a) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k \left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1} = u_1 + (-1)^n u_n$$

   (b) En déduire la valeur de

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(1 - e^{-k+1}\right)}{k-1}$$

Exercice 7.3- 5 E ECRICOME 2005

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)dx$.

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad : \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 7.3- 6 T HEC 2006

On désigne par f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ et on considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_0 = \int_0^1 f(x)dx \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^\times, \quad I_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$$

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour différentes fonctions f.

1. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \ln(1+x^2)$.
   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :
   $$I_n = \frac{1}{n+1}\left(\ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}dx\right).$$
   (b) Etablir, pour tout x de $[0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2} \leqslant x^{n+2}$.

(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \dfrac{x^{n+2}}{1+x^2}dx = 0$.

(d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

(a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ en fonction de n.

(b) Etudier la monotonie éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) En déduire, pour tout n supérieur ou égal à 2 , l'encadrement :

$$\frac{1}{3(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{3(n-1)}.$$

(d) Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

3. Dans cette question, on suppose que f est définie par : $f(x) = e^{-x}$, où e désigne la base des logarithmes népériens.

(a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

(b) Etablir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la valeur de la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

(c) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, I_{n+1} en fonction de I_n.

(d) En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7.3- 7 T HEC 2008

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}dx$, et donc en particulier, on a $u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$.

1. Vérifier que, pour tout réel x différent de 1 et de -1, on a :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x}$$

2. On considère les trois fonctions f, g et h définies sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = \ln(1+x)$ et $h(x) = \ln(1-x^2)$

(a) Calculer, pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, les dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$.

(b) Exprimer, pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $h(x)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$.

(c) En déduire, pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la dérivée $h'(x)$.

3. En déduire que l'on a : $u_0 = \frac{\ln 3}{2}$ et $u_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

4. (a) Montrer, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante : $u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

(b) En déduire les valeurs de u_2 et de u_3.

5. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. (a) Montrer que pour tout x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a : $\frac{1}{1-x^2} \leq \frac{4}{3}$
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'inégalité suivante : $u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$
   (c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
7. On pose, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, c'est-à-dire, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   (a) Donner, pour tout réel x différent de 1, l'expression sous forme de fraction, de la somme : $1 + x + ... + x^n$.
   (b) Etablir l'égalité :
   $$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-x^2)(1-x)}dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}dx$$
   (c) Etablir, pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :
   $$0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)(1-x)}dx \leq 2u_{n+1}$$
   (d) En déduire l'expression de la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$, sous forme d'une intégrale.
   (e) En réduisant au même dénominateur, pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, l'expression :
   $$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x}$$
   En déduire la valeur de $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice 7.3- 8 T ESCP 2012

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}dt$ et pour tout $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}dt$.

1. Soit f la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = (1+t)^{3/2}$.
   (a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.
   (b) En déduire la valeur de u_0.
2. (a) Etablir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant : $0 \leq u_n \leq \dfrac{\sqrt{2}}{n+1}$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente ; donner sa limite.
3. (a) Etablir pour tout entier naturel n, à l'aide d'une intégration par parties, la relation suivante :
   $$u_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 \left(t^n + t^{n+1}\right) \sqrt{1+t}dt$$
   (b) En déduire pour tout entier naturel n la relation suivante : $u_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{2} - 2(n+1)u_n}{2n+5}$.

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
   (b) En déduire pour tout entier naturel n, à l'aide de la question 3.b, l'inégalité suivante : $u_n \geq \dfrac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} \leq \dfrac{4\sqrt{2}}{4n+7}$.
   (d) Montrer que la suite $(nu_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.

7.4 Encadrement d'intégrales

Exercice 7.4- 1 T ECRICOME 2009

On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

et on pose

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$$

1. Déterminer le tableau de variation de f.
2. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$.
   En déduire l'encadrement suivant
   $$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$
3. Prouver que pour tout réel x dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$:
   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}.$$
   En déduire que :
   $$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx$$
4. Effectuer une intégration par parties, pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)\,e^{-x}dx$.
5. Montrer que
   $$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$
   En déduire un nouvel encadrement de I.

Exercice 7.4- 2 T ESSEC 2003

Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n})$

1. **Etude d'une fonction**
   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$par : $f(t)=t-1-\ln t$
   (a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $]0;+\infty[$ et déterminer f ?
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Représenter l'allure de la courbe d'équation $y=f(t)$ dans un repère orthonormé pour tout réel t compris entre 0 et 4.
   On donne à cet effet les approximations suivantes : $\ln(2)\approx 0,7$ et $\ln(3)\approx 1,1$
2. **Calcul d'intégrale**.
   (a) Soit $x$un réel de $]0;1[$.Justifier l'existence de l'intégrale : $\int\limits_x^1 f(t)dt$.
   (b) Montrer que la fonction $t\longmapsto t\ln t-t$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
   (c) En déduire le calcul de $\int\limits_x^1 f(t)dt$ et montrer que $\lim\limits_{x\to0^+}\int\limits_x^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$.
3. **Calcul d'une somme et encadrement de celle-ci par la méthode des rectangles**
   Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On rappelle que : $n!=1\times2\times.......\times n$.
   (a) Démontrer que :
   $$\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{k}{n})=\ln(\frac{n!}{n^n}).$$
   (b) En déduire l'égalité (1) suivante :
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})=\frac{n+1}{2n}-1-\frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n}).$$
   (c) Soit k un entier tel que $2\leqslant k\leqslant n$. En utilisant la monotonie de f sur $]0;1]$, démontrer que :
   $$\forall t\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}],\quad f(\frac{k}{n})\leqslant f(t)$$
   et en déduire que :
   $$\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})\leqslant\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(t)dt$$

(d) Déduire du résultat précédent l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt.$$

(e) A l'aide d'une démarche analogue à celle qui vient d'être effectuée, montrer que :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n})$$

(f) Déduire alors à l'aide des deux inégalités précédentes l'encadrement ci-dessous :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \leqslant \frac{1}{n}f(\frac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$$

4. **Conclusion**

(a) Déduire du dernier encadrement le résultat suivant :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2}$$

(b) Déterminer ,à l'aide de l'égalité(1), la valeur de la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(\frac{n!}{n^n}).$$

Exercice 7.4- 3 T HEC 2005

L'objet de cet exercice est l'étude de quelques propriétés mathématiques de la valeur actualisée nette d'un projet d'investissement et du taux de rentabilité interne de ce projet.

Une entreprise envisage d'acquérir un nouveau matériel dont le prix est égal à I et dont la durée de vie est estimée à n années (n entier naturel non nul donné), sans valeur résiduelle (au terme des n années, le prix de revente du matériel est nul).

Pour k entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, l'utilisation de ce nouvel investissement procurera à l'entreprise, à la fin de la $k^{ième}$ année, une recette nette R_k.

On suppose que les réels $I, R_1, ..., R_n$ sont strictement positifs.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = -I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+x)^k}$$

(pour un taux d'actualisation égal à $100x$ (en %) le réel $f(x)$ représente la valeur actualisée nette du projet d'investissement).

Dans les parties **I** *et* **II**, *on suppose que l'entier n et les réels $R_1, ..., R_n$ sont donnés et vérifient l'inégalité suivante :*

$$\sum_{k=1}^{n} R_k > I$$

Partie I

1. Établir le tableau des variations de la fonction f.
2. (a) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Préciser les branches infinies de cette courbe.
   (b) La fonction f est-elle convexe sur son intervalle de définition ?
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\overline{x}$ tel que $f(\overline{x}) = 0$. Vérifier que $\overline{x}$ est strictement positif. (le réel $\overline{x}$ représente le taux de rentabilité interne associé au projet d'investissement).

Partie II

Dans cette partie, on suppose que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $R_k = R$, c'est-à-dire que tous les réels $R_1, ..., R_n$, sont égaux, leur valeur commune étant le réel strictement positif noté R.

1. (a) Pour q réel, rappeler l'expression de la somme $\sum_{k=1}^{n} q^k$ en fonction de q et n.
   (b) En déduire l'expression suivante de f :

$$f(x) = \begin{cases} R \times \dfrac{1 - (1+x)^{-n}}{x} - I & \text{si} \quad x \in \left]-1, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\\ nR - I & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. *On rappelle que $\overline{x}$ désigne l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ (voir la question* **3** *de la partie* **I**).
   Écrire la relation vérifiée par $\overline{x}$, R , I et n. En déduire que si on pose $\overline{X} = 1+\overline{x}$, on a :

$$\overline{X}^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right)\overline{X}^{n} + \frac{R}{I} = 0$$

3. (a) Soit h la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$h(t) = t^{n+1} - \left(1 + \frac{R}{I}\right) t^{n} + \frac{R}{I}$$

   Calculer $h(1)$, $h(1+R)$ et $\lim_{t \to +\infty} h(t)$.
   (b) Dresser le tableau des variations de h et montrer que h admet un *minimum* atteint pour une valeur t_0 de t, que l'on déterminera. Montrer que t_0 est strictement supérieur à 1 et que $h(t_0)$ est strictement négatif.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\overline{X}$ appartenant à l'intervalle $\left]t_0, 1+\dfrac{R}{I}\right[$, tel que $h\left(\overline{X}\right)=0$. En déduire les inégalités suivantes :

$$0<\frac{1}{n+1}\left(n\frac{R}{I}-1\right)<\overline{x}<\frac{R}{I}$$

Partie III

On reprend dans cette partie, les mêmes hypothèses que celles de la partie II, mais on ne suppose plus que l'entier strictement positif n est fixé. Ainsi, les réels strictement positifs I et R sont donnés et pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on a $R_k = R$.
On note alors $f_n(x) = -I + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{R}{(1+x)^k}$.

On pose $a = \dfrac{R}{I}$ et on désigne par A la partie de $\mathbb{N}^\times$ formée de tous les entiers n qui vérifient $n > \dfrac{1}{a}$: $A = \left\{n \in \mathbb{N}^\times \ / \ n > \dfrac{1}{a}\right\}$.

1. (a) Soit $(a_n)_{n\in A}$ la suite définie pour tout n, appartenant à A, par l'égalité : $a_n = \dfrac{1}{n+1}(na-1)$.
   Étudier la monotonie et la convergence de cette suite.
   (b) Pour n appartenant à A, on désigne par $\overline{x_n}$ la solution strictement positive de l'équation $f_n(x) = 0$.
   Montrer que $0 < a_n < \overline{x_n} < a$.
   En déduire la limite de la suite $(\overline{x_n})_{n\in A}$.
2. (a) Pour $n \in A$, on pose $K_n = \int\limits_{a_n}^{a} f_n(x)\, dx$.
   Montrer l'égalité :

$$K_n = a_n I - R + R\ln\left(\frac{R}{a_n I}\right) - R\int\limits_{a_n}^{a} \frac{dx}{x(1+x)^n}$$

   (b) Montrer que l'on a : $0 \leqslant \int\limits_{a_n}^{a} \dfrac{dx}{x(1+x)^n} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)a_n}\left[\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{1}{1+a}\right)^{n-1}\right]$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{a_n}^{a} \dfrac{dx}{x(1+x)^n} = 0$.
   (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n$.