Chapitre 4

Probabilités

4.1 Probabiltés Conditionnelles

Exercice 4.1- 1

Neuf amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée. Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte.
L'un d'entre eux extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartons de la boîte.
On définit les évènements G_1, G_2, F_1 et F_2 par :
- G_1 : « Un garçon est désigné au premier tirage » ;
- G_2 : « Un garçon est désigné au deuxième tirage » ;
- F_1 : « Une fille est désignée au premier tirage » ;
- F_2 : « Une fille est désignée au deuxième tirage ».

1. Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $G_1 \cap F_2$. La comparer à celle de l'évènement $G_2 \cap F_1$.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.
4. Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.
5. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées. Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 4.1- 2

Une salle de spectacle propose, pour la saison, des abonnements pour 4, 5 ou 6 spectacles. Dans la population des abonnés, la répartition est la suivante :
- 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles,

- 25% ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
- le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.
- 60% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :
  - 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles,
  - 40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles,
  - le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles.

On interroge un abonné au hasard. On note A l'événement " L'abonné interrogé a moins de 25 ans ". On note B l'événement " L'abonné interrogé a choisi 5 spectacles ".

1. (a) Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus ?
   (b) Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle est la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles ?
   (c) Décrire l'événement (A ∩ B), et calculer la probabilité p(A ∩ B).
2. (a) Déterminer la probabilité p($\overline{A} \cap B$).
   (b) En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\overline{A}$ est réalisé.
3. L'abonnement pour 4 spectacles coûte 50 euros, celui pour 5 spectacles coûte 60 euros, et celui pour 6 spectacles coûte 70 euros. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance de X.

Exercice 4.1- 3

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points espacés régulièrement sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement : " le n-ième sondage est positif " est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des évènements suivants :
   (a) A : " les 2^{e} et 3^{e} sondages sont positifs " ;
   (b) B : " les 2^{e} et 3^{e} sondages sont négatifs ".
2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3^{e} sondage soit positif.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. Exprimer p_n en fonction de n.

Exercice 4.1- 4

On considère le dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et les six dés D_i $(1 \leq i \leq 6)$ tels que, pour chaque i, le dé D_i possède i faces blanches et les autres noires. On choisit tout d'abord un numéro i compris entre 1 et 6 en lançant le dé A puis on lance D_i.

1. $\forall i \in [\![1;6]\!]$, calculer la probabilité que le dé D_i soit choisi.
2. $\forall i \in [\![1;6]\!]$, calculer la probabilité qu'une face blanche soit obtenue sachant que le dé D_i est choisi.
3. Calculer la probabilité qu'il sorte une face blanche.

Exercice 4.1- 5

Le gérant d'un magasin de matériel informatique a acheté un stock de boîtes de disquettes. 5% des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boîtes abîmées contiennent au moins une disquette défectueuse,
- 98% des boîtes en bon état ne contiennent aucune disquette défectueuse,
- les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des autres.

Un client achète une des boîtes du lot. On désigne par A l'événement : "la boîte achetée est abîmée" et par D l'événement : "la boîte achetée contient au moins une disquette défectueuse".

1. Donner les probabilités $P(A), P(\overline{A}), P_A(D), P_{\overline{A}}(D), P_A(\overline{D})$ et $P_{\overline{A}}(\overline{D})$.
2. Calculer la probabilité de l'événement D.
3. Le client constate qu'une des disquettes est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Exercice 4.1- 6

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

- T_n : " le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. "
- P_n : " le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. "

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montrer que $p(T_2) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$$

(d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4.1- 7

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

- Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Étape n ($n \geqslant 2$) :
  - Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
  - Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.
On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   (d) Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4.1- 8

Partie I : On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une

face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : " à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ". Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\dfrac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II : On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. (a) Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\dfrac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Exercice 4.1- 9 T ESC 2006, extrait

On considère trois urnes : l'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne U_2 contient une rouge et aucune bleue et l'urne U_3 contient une bleue et aucune rouge. On choisit d'abord une de ces trois urnes au hasard avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne une série illimitée de tirages d'une boule, avec remise dans cette urne. Pour $i = 1, 2, 3$ on note U_i l'événement : « l'urne choisie pour les tirages est l'urne U_i ». Pour tout entier naturel non nul k, on note R_k :« le k-ième tirage a amené une boule rouge ».

1. Justifier que les événements (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, donner les probabilités conditionnelles $P_{U_1}(R_k)$, $P_{U_2}(R_k)$, $P_{U_3}(R_k)$. En déduire $P(R_k) = \frac{7}{15}$.
2. Soit $n \in N^*$, justifier que $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
3. Préciser les valeurs de $P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$ et $P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$. En déduire par formule des probabilités totales que $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}$.
4. Montrer que les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.
5. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1 + (\frac{2}{5})^k}{1 + (\frac{2}{5})^{k-1}}$.

Exercice 4.1- 10 T HEC 2007

1. On considère trois événements A, B, C tels que $P(B) \neq 0, P(B) \neq 1, P(C) \neq 0, P(B \cap C) \neq 0$.
   (a) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
   $$P(A \cap C) = P(A \cap B \cap C) + P\left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$$
   (b) En déduire alors la formule suivante :
   $$P_C(A) = P_{B\cap C}(A)\, P_C(B) + P_{\overline{B}\cap C}(A)\, P_C\left(\overline{B}\right)$$

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante : on lance indéfiniment une pièce amenant *Pile* avec la probabilité p $(0 < p < 1\ )$, et *Face* avec la probabilité q,où $q = 1 - p$.
On admet que les résultats des différents lancers sont indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note F_k l'événement : " on obtient *Face* à l'issue du k-ième lancer ". $\overline{F_k}$ est donc l'événement :" on obtient *Pile* à l'issue du k-ième lancer ".
On considère l'événement E : " 2 *Face* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Pile* consécutifs" Par exemple :

- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}F_5F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $\overline{F_1}F_2F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$, alors E est réalisé ;
- si les résultats des six premiers lancers sont $F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4}\,\overline{F_5}F_6$, alors $\overline{E}$ est réalisé.

2. (a) Donner sans calcul la valeur de $P_{F_1\cap F_2}(E)$.
   (b) Justifier également sans calcul la relation suivante $P_{F_1\cap\overline{F_2}}(E) = P_{\overline{F_1}}(E)$.
   (c) En utilisant la relation trouvée à la question **1.**(b), avec $A = E, B = F_2$ et $C = F_1$, trouver une relation entre $P_{F_1}(E)$ et $P_{\overline{F_1}}(E)$.
3. (a) Que vaut $P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}}(E)$?
   (b) Montrer que $P_{\overline{F_1}\cap F_2}(E) = P_{F_1}(E)$.
   (c) Toujours en utilisant la relation de la question **1.**(b) appliquée à des événements bien choisis, montrer que $P_{\overline{F_1}}(E) = qP_{F_1}(E)$.
4. (a) Déduire des questions **2** et **3** les égalités $P_{F_1}(E) = \frac{q}{1-pq}$ et $P_{\overline{F_1}}(E) = \frac{q^2}{1-pq}$.
   (b) Calculer $P(E)$ en fonction de p et de q.
5. On note G l'événement : " 2 *Pile* consécutifs apparaissent avant l'apparition éventuelle de 2 *Face* consécutifs"
   (a) Expliquer comment trouver $P(G)$ sans calcul.
   (b) Vérifier que $P(E)+P(G) = 1$. Comment interpréter ce dernier résultat ?

Exercice 4.1- 11

Un jeu consiste à tirer successivement 2 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant une boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner.
On appelle N l'évènement "la boule noire figure parmi les boules tirées" et G l'évènement "le joueur gagne".

1. (a) Montrer que la probabilité de l'évènement N est $\frac{1}{5}$.
   (b) Déterminer la probabilité de l'évènement G.
   (c) Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, où m est un réel strictement positif.
   – Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.
   – S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.
   – S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.
   On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m.
   (c) On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.
3. Soit n un entier naturel non nul. On joue n fois à ce jeu sachant qu'après chaque partie les boules sont remises dans le sac. Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à p avec $p \in]0;1[$.

4.2 Dénombrement

Exercice 4.2- 1

Une urne contient 9 boules, 4 rouges et 3 blanches et 2 noires.

1. On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir un tirage unicolore ? Un tirage bicolore ?
2. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une sans remise.
3. Mêmes questions si on tire 3 boules une à une avec remise.

Exercice 4.2- 2

Un conseil d'administration comporte 10 membres.

1. Combien de bureaux différents de 6 membres peut-on former ?
2. Combien de tels bureaux peut-on former si Mme A refuse de siéger avec Mme B qui, elle, n'accepte de siéger qu'avec M. C ?
3. Combien parmi les 10 membres, y a-t-il de façons de choisir sans cumul de mandat un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire ?
4. De combien de façons peut-on faire ce choix s'il y a 6 hommes et 4 femmes et que les responsabilités sont partagées entre 2 hommes et 2 femmes ?

Exercice 4.2- 3

Une urne contient 12 boules : 4 rouges, 3 bleues et 5 vertes numérotées de 1 à 12.

1. On tire **simultanément** 3 boules.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages tricolores ?
   (d) En déduire le nombre de tirages bicolores ?
2. On tire 2 boules **une à une sans remise**.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages comportant une rouge et une verte ?
3. On tire 2 boules **une à une avec remise**.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages comportant une rouge et une verte ?

Exercice 4.2- 4

Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 3 bleues et 3 vertes numérotées de 1 à 10.

1. On tire **simultanément** 3 boules.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
   (c) Combien y a-t-il de tirages bicolores ?
2. On tire 3 boules **une à une sans remise**.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages contenant un seul numéro pair ?
3. On tire 3 boules **une à une avec remise**.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages comportant au moins 2 boules rouges ?

Exercice 4.2- 5

Dans une urne contenant 3 boules bleues, 4 rouges et une noire, on prend successivement et avec remise 3 boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages contenant 3 boules de la même couleur ?
3. Combien y a-t-il de tirages contenant au moins une boule rouge ?
4. Combien y a-t-il de tirages contenant chacune des trois couleurs ?

Exercice 4.2- 6

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules vertes et 5 boules bleues.
On prend simultanément 3 boules.
Dans combien de tirages :

1. on obtient un tirage tricolore.

2. on obtient 3 boules de la même couleur.
3. on obtient au plus une boule rouge.
4. on obtient au moins une boule bleue.

Exercice 4.2- 7

Une pochette contient 3 timbres rouges, 5 timbres bleus et 4 timbres verts, numérotés de 1 à 12.
On tire simultanément au hasard 4 timbres.
Dans combien de choix :

1. les 4 timbres sont de la même couleur ?
2. une et une seule couleur ne figure pas dans le lot tiré ?
3. les 3 couleurs figurent dans le lot choisi ?

Exercice 4.2- 8

Un enfant dispose de 7 jetons numérotés de 1 à 7. Il forme des nombres à l'aide de jetons choisis au hasard.
Combien peut-il former :

1. de nombres de 3 chiffres ?
2. de nombres de 7 chiffres ?
3. de nombres pairs de 3 chiffres ?
4. de nombres ne comportant que des chiffres impairs ?
5. de nombres de 3 chiffres, divisibles par 5 ?
6. de nombres inférieurs à 2000 ?

4.3 Chaînes de Markov

Exercice 4.3- 1 T ECRICOME 2002

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$.
Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

n désigne un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n «la plante donne une fleur rose la nième année»

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético géométrique qui vérifie $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 . En déduire $\lim_{n\to+\infty} p_n$
3. (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

   (b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

Exercice 4.3- 2 T ESC 2003

Au club de vacances, chaque jour, Olivier choisit une activité parmi trois possibilités : ballon, planche à voile ou ski nautique. Le premier jour, il la choisit au hasard. Ensuite, chaque jour :

– s'il a choisi le jeu de ballon la veille, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, ou pour le ski nautique avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

– s'il a choisi la planche à voile la veille, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou change pour le ballon avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.

– s'il a choisi le ski nautique la veille, il reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$, ou change pour le ballon avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les événements B_n : "Olivier choisit le jeu de ballon le jour n", V_n : "Olivier choisit la voile le jour n et S_n : "Olivier choisit le ski nautique le jour n".

On note leurs probabilités $b_n = P(B_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $s_n = P(S_n)$.

Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ 3-3\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \\ 2+9\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\dfrac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer b_1, v_1 et s_1.

6. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer b_{n+1}, v_{n+1} et s_{n+1} en fonction de b_n, v_n et s_n.
7. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

   Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $X_{n+1} = MX_n$.
8. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $X_n = M^{n-1}X_1$.
9. En déduire b_n, v_n et s_n en fonction de n.

Exercice 4.3- 3

Un pays est divisé en trois zones A, B et C. On suppose que sa population ne varie pas au cours du temps mais que les habitants changent de zone de la façon suivant :

- Si un individu est en A l'année n, l'année suivante, il sera en A avec la probabilité 0.4, en B avec la probabilité 0.2 et en C avec la probabilité 0.4.
- Si l'année n, il est en B, l'année suivante il sera en A avec la probabilité 0.4, en B avec la probabilité 0.2 et en C avec la probabilité 0.4.
- Si l'année n, il est en C, l'année suivante il sera en A avec la probabilité 0.1, en B avec la probabilité 0.6 et en C avec la probabilité 0.3.

Au départ l'individu est en A. Soient p_n, q_n et r_n les probabilités qu'il soit en A, B, C l'année n.

1. Etablir les relations liant p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1} à p_n, q_n et r_n.
2. Soit $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
3. En déduire X_n en fonction de A, n, X_0.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 3 \\ 1 & 19 & -4 \\ 0 & 20 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -99 & -44 & 121 \\ 1 & 1 & 1 \\ -20 & -20 & 35 \end{pmatrix}$ Calculer PQ.
5. En déduire que P est inversible puis préciser P^{-1}.
6. Calculer $A' = P^{-1}AP$. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, A^n.
7. Conclure quant à p_n, r_n et q_n en fonction de n.
8. Préciser leurs limites respectives en $+\infty$.

Exercice 4.3- 4 E ESSEC 2000

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\dfrac{2}{3}$.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\dfrac{1}{2}$.

- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à $\frac{1}{3}$.
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.

(Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).
Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :
ABC_n :" à l'issue de la n-ième épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ".
AB_n : " à l'issue de la n-ième épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ".
On définit de façon analogue les événements BC_n , et CA_n.
A_n : " à l'issue de la n-ième épreuve, seul A n'est pas éliminé ".
On définit de façon analogue les, événements B_n et C_n. $\emptyset_n$: " à l'issue de la n-ième épreuve, les trois tireurs sont éliminés ".
Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, $\emptyset_0$ l'événement impossible.

PARTIE 1

On établit dans cette partie **1** quelques résultats probabilistes préliminaires.

1. Calcul de probabilités
   (a) Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.
   (b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
   (A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
   (c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :
   (A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).
2. Détermination de probabilités conditionnelles
   (a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n.
   Dans la suite, on ne considérera donc que les événements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n C_n, $\emptyset_n$.
   (b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1}/ABC_n)$.
   (c) Expliciter $p(BC_{n+1}/ABC_n)$ à l'aide de la question 1, puis donner $p(CA_{n+1}/ABC_n)$.
   (d) Expliciter $p(A_{n+1}/ABC_n)$, $p(B_{n+1}/ABC_n)$ et $p(C_{n+1}/ABC_n)$.
   (e) Expliciter $p(A_{n+1}/CA_n)$, $p(B_{n+1}/BC_n)$,$P(C_{n+1}/CA_n)$ et $p(C_{n+1}/BC_n)$.
   (f) Expliciter $p(\emptyset_{n+1}/ABC_n)$, $P(\emptyset_{n+1}/BC_n)$ et $p(\emptyset_{n+1}/CA_n)$.
3. Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat
   On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.
   (a) Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?
   (b) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap ...ABC_{n-1} \cap ABC_n$$

(c) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$

$$ABC_1 \cap ... \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap ... \cap CA_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap ... \cap CA_n$)

(d) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$:

$$ABC_1 \cap ... \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap ... \cap BC_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap ... \cap BC_n$)

(e) Soit $n \geqslant 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la n-ième épreuve, et en déduire la probabilité $p(T = n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question 3a.

(f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = n)$ (avec $n \geqslant 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

PARTIE Il

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1. Expression de la matrice de transition M

   (a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n)$, $p(BC_n)$, $p(CA_n)$, $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(\emptyset_n)$.
   Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

   $$E_{n+1} = ME_n.$$

   On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1

   (b) En déduire E_n en fonction de n, de M et E_0.

2. Calcul des puissances de la matrice M

   (a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U" et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V" et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7

   $$M' = \begin{pmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{pmatrix} \quad , \quad M'' = \begin{pmatrix} U" & O \\ V" & I_4 \end{pmatrix}$$

   où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4.
   Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

   $$M'M" = \begin{pmatrix} U' & O \\ V'U" + V" & I_4 \end{pmatrix}$$

(b) Expliciter les matrices U et V telles que : $M = \begin{pmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{pmatrix}$

(c) Etablir enfin par récurrence sur $n \geqslant 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{pmatrix} U & O \\ V + VU + .. + VU^{n-1} & I_4 \end{pmatrix}$$

3. Diagonalisation de la matrice U

(a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :
– la *première* composante de V_1 vaut 1.
– la *troisième* composante de V_2 vaut 1.
– la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

(b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3. Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4. Calcul de la limite des puissances de la matrice M

(a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + ... + D^{n-1}$.

(b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X.
On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + ... + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n), $(I_3 + U + U^2 + ... + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + ... + VU^{n-1})$.

(c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n).

(d) Vérifier que les suites $(p(ABC_n))$, $(p(BC_n))$ et $(p(CA_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(A_n))$, $(p(B_n))$, $(P(C_n))$, $(P(\emptyset_n))$.Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.

Exercice 4.3- 5 T ESC 2000

Partie I

On considère dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ les 6 matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} (les détails des calculs figureront sur la copie).

   (b) On constate que : $M.T = I$. En déduire que M est inversible et donner la matrice M^{-1}.

2. (a) Vérifier que $P^{-1}.M.P = D$.
   (b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de M^n en fonction de P, D^n et P^{-1}.
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer les coefficients de la matrice D^n.
   (d) On désigne par Δ la matrice dont les coefficients sont les limites quand n tend vers $+\infty$ des coefficients de la matrice D^n et l'on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = P\Delta P^{-1}$. Déterminer la matrice Δ et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = L$.

Partie II
Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés d'une année sur l'autre, au hasard entre trois secteurs A, B et C, en respectant les proportions suivantes :
- 75% des employés du secteur A y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur C,
- 75% des employés du secteur B y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A,
- 25% des employés du secteur C y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A et 50% dans le secteur B.

1. On désigne par a, b et c les effectifs respectifs dans les secteurs A, B et C au cours de la première année de fonctionnement. Au cours de la deuxième année, les effectifs dans les secteurs A, B et C sont respectivement de 35, 30 et 15 employés. On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que : $M.X = B$, où M est la matrice définie dans la **partie I**.
   (b) En déduire, à l'aide de la question 1.(b) de la **partie I**, les valeurs de a, b et c.

2. La première année, un employé E travaille dans le secteur A. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par :
   - A_n l'événement : "E travaille dans le secteur A la $n^{ième}$ année",
   - B_n l'événement : "E travaille dans le secteur B la $n^{ième}$ année",
   - C_n l'événement : "E travaille dans le secteur C la $n^{ième}$ année",

   et on pose : $a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n), U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, et $U = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \end{pmatrix}$

   (a) M désigne la matrice de la **partie I**. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, établir que : $U_{n+1} = M.U_n$.

(b) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = M^{n-1}.U_1$.

(c) L désigne la matrice de la **partie I** et l'on admet que : $U = L.U_1$. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n, b_n et c_n.

Exercice 4.3- 6 T HEC 2001

Une élection comporte trois candidats et n votants, où n est un entier supérieur ou égal à 3. Chaque votant donne sa voix à l'un ou l'autre de ces trois candidats. Tout candidat qui a obtenu au moins une voix est élu.
On suppose que chaque vote se porte au hasard, de façon équiprobable, sur un de ces candidats et que les votes sont mutuellement indépendants.
Le vote se faisant par correspondance, le dépouillement se fait au fur et à mesure de la réception des bulletins de vote et, pour tout entier naturel k au plus égal à n, on note u_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, un seul candidat ait obtenu des voix, v_k la probabilité qu'après réception du k-ième bulletin, exactement deux candidats aient obtenu au moins une voix chacun et w_k la probabilité qu'après réception du k-ièmebulletin, les trois candidats aient obtenu au moins une voix chacun.

1. (a) Préciser les nombres u_1, v_1 et w_1.

   (b) Justifier les égalités : $u_2 = \dfrac{1}{3}, \quad v_2 = \dfrac{2}{3}, \quad w_2 = 0.$

   (c) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer qu'il existe une matrice M vérifiant pour tout entier naturel k non nul et srictement inférieur à n :
$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{pmatrix}$$

   (d) En déduire l'égalité matricielle :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

2. Soit A la matrice donnée par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   (a) Calculer la matrice A^2.

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul k, il existe des nombres réels a_k, b_k, c_k vérifiant l'égalité $A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_k & 2^k & 0 \\ b_k & c_k & 3^k \end{pmatrix}$ et les relations
$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{k+1} = a_k + 2^{k+1} \\ b_{k+1} = b_k + 2c_k \\ c_{k+1} = 2c_k + 3^k \end{pmatrix} \right.$$

(c) Pour tout entier naturel non nul k, on pose : $d_k = a_{k+1} - a_k$ et $q_k = \dfrac{c_{k+1}}{2^{k+1}} - \dfrac{c_k}{2^k}$.
Montrer que les suites $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ sont deux suites géométriques et préciser leurs raisons.

(d) Calculer de deux façons différentes, pour tout entier naturel k non nul, les sommes $\sum_{j=1}^{k-1} d_j$ et $\sum_{j=1}^{k-1} q_j$.
En déduire les égalités : $\left\{\begin{pmatrix} a_k = 2^{k+1} - 2 \\ c_k = 3^k - 2^k \end{pmatrix}\right.$

(e) Exprimer, pour tout entier naturel non nul k, $b_{k+1} - b_k$ en fonction de k.
En déduire, par une méthode analogue à celle de la question d), l'égalité : $b_k = 3^k - 2^{k+1} + 1$.

3. (a) Exprimer la matrice M^{n-1} à l'aide de la matrice A^{n-1} et en déduire les égalités : $\left\{\begin{array}{ll} u_n = & \dfrac{1}{3^{n-1}} \\ v_n = & \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ w_n = & 1 - \dfrac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{array}\right.$

(b) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

(c) À partir de quel nombre n de votants est-on certain à 99% qu'au moins deux candidats sont élus ?

Exercice 4.3- 7 T ESC 2001

Partie 1 On considère dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ les 4 matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
(les détails des calculs figureront sur la copie).

(b) Vérifier que : $P^{-1}MP = D$ puis exprimer M en fonction de P, D etP^{-1}.

2. (a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer les coefficients de la matrice D^n.

(b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer M^n en fonction de P , D^n et P^{-1}.
En déduire les coefficients de M^nen fonction de n.

3. (a) Montrer que D est inversible et calculer D^{-1}.

(b) En déduire que M est inversible et exprimer M^{-1}en fonction de P, D^{-1} et P^{-1}.

Partie 2
On effectue des tirages dans trois urnes :

– Une urne blanche contient 1 boule blanche et 3 boules noires.
– Une urne noire contient 3 boules noires et 1 boule verte.
– Une urne verte contient 1 boule noire et 3 boules vertes.

Pour le premier tirage, on choisit une urne au hasard, on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.
Le second tirage a lieu dans l'urne ayant la même couleur que la première boule obtenue au premier tirage : on y prend une boule, on note sa couleur puis on remet la boule dans l'urne dont elle provient.
On continue ainsi en suivant le même protocole :
le $(n+1)^{ème}$ tirage s'effectue dans l'urne ayant la même couleur que la boule obtenue au $n^{ème}$ tirage, et une boule tirée est toujours remise dans l'urne dont elle provient.
Pour n entier naturel non nul , on désigne par : B_n l'événement : " le $n-$ième tirage donne une boule blanche ". N_n l'événement : " le n-ième tirage donne une boule noire ". V_n l'événement : " le n-ième tirage donne une boule verte ".

1. (a) Calculer $P(B_1), P(N_1)$ et $P(V_1)$.
   (b) Etablir que $P(B_2) = \dfrac{1}{48}$ et $P(N_2) = \dfrac{7}{12}$
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $P(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}P(B_n)$
   De quel type est la suite $(P(B_n))_{n\geqslant 1}$? En déduire$P(B_n)$enfonction de n .
   (b) M désigne la matrice définie à la partie 1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} P(B_n) \\ P(N_n) \\ P(V_n) \end{pmatrix}$
   En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{B_n, N_n, V_n\}$, établir que : $X_{n+1} = MX_n$.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $X_n = M^{n-1}X_1$.
3. En déduire $P(N_n)$ et $P(V_n)$en fonction de$n$ et déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4.3- 8 T ECRICOME 2003

On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

1. Calculer le produit matriciel $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible ?
2. Calculer A^2, A^3 et montrer que : $A^3 = \dfrac{1}{2}(A^2 + A)$
3. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A \text{ avec } \begin{cases} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2} a_n \end{cases} .$$

Donner a_1 et b_1

4. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
   En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2}$
5. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.

Etude de la loi d'une variable aléatoire X_n
Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0, C_1, C_2 selon le protocole suivant :

- - A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0, à l'instant $n + 1$ il est en C_1
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^{\times}$, le point lumineux est en C_1, à l'instant $n+1$ il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant $n, n \in \mathbb{N}^{\times} \backslash \{1\}$ le point lumineux est en C_2, à l'instant $n + 1$ il est en C_1.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i, pour $i \in \{0, 1, 2\}$

1. On note U_n la matrice unicolonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n = i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n = i)$.
   Préciser U_0 et U_1.
2. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$
3. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^n U_0$.
   Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_n U_2 + b_n U_1$.
4. En déduire les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2)$ en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.

Exercice 4.3- 9 T HEC 2006

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille.
Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences.
On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{3}{4}$;

– si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$;

– si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, M_n) l'événement « la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lyon, Marseille) le soir du n-ième jour ».
On considère les probabilités suivantes : $r_n = P(R_n)$, $l_n = P(L_n)$, $m_n = P(M_n)$.
On suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes, et on pose donc : $r_0 = 1$, $l_0 = 0$, $m_0 = 0$.

On désigne par I la matrice identité d'ordre 3, définie par : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on définit la matrice colonne à trois lignes U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ l_n \\ m_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = AU_n$, où A est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$
   (b) Expliciter U_0. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $U_n = A^n U_0$.
2. On se propose dans cette question de calculer A^n.
   On considère la matrice S ,carrée d'ordre 3, définie par : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice S est inversible et calculer explicitement sa matrice inverse S^{-1}.
   (b) On pose $\Delta = S^{-1}AS$. Expliciter, sous forme de tableau, la matrice Δ.
   (c) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, l'expression sous forme de tableau de la matrice Δ^n.
   (d) Exprimer A en fonction de S, S^{-1} et Δ. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, on a $A^n = S\Delta^n S^{-1}$.
   (e) Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, l'expression sous forme de tableau de A^n.
3. (a) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, r_n, l_n, m_n en fonction de n.

   (b) Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.

4. Le soir d'un jour donné, si on désire, où qu'elle se trouve, rapatrier la voiture à Rennes, le coût de cette opération est de 100 euros si la voiture est à Lyon, de 150 euros si la voiture est à Marseille, et évidemment nul si la voiture est à Rennes.
   On note X_n la variable aléatoire égale au coût de cette opération le soir du n-ième jour.
   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X_n.

Exercice 4.3- 10 T ESCP 2011

0n considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.
On note enfin T_1le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.
On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace ($P(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.
On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[X_n = 0] \\ \mathbb{P}[X_n = 1] \\ \mathbb{P}[X_n = 2] \end{pmatrix}, \ V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer pour tout entier naturel n,l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$)
   (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :
   $$U_{n+1} = MU_n$$
   Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
   (c) Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.
   (d) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :
   $$U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$$

   (e) Donner la loi de la variable X_n .

2. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$,espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Reconnaître la loi de T_1.
4. Ecrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $\mathbb{P}[T_2 = 2]$ et $\mathbb{P}[T_2 = 3]$.
5. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2,écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\mathbb{P}[T_2 = n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$