Chapitre 3

Suites

3.1 Base

Exercice 3.1- 1

Pour chacune des suites suivantes, expliciter le terme général en fonction de n.

1. Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + 3 = 2u_n$$

avec $u_0 = 0$.

2. Soit la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4w_{n+2} + 2w_{n+1} - 2w_n = 0$$

avec $w_0 = w_1 = 1$.

Exercice 3.1- 2

Etudier le sens de variation de la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{-n+1}{n+2}$$

Exercice 3.1- 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.

2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,
$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$
4. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3.1- 4

On considère les suites réelles u et v définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rr} u_{n+1} = & -\frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}v_n - \frac{3}{4} \\ v_{n+1} = & u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcr} w_n & = & u_n + v_n + 6 \\ t_n & = & u_n + \frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2} \end{array} \right.$

1. Montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques.
2. Déterminer w_n et t_n en fonction de l'entier n.
3. Montrer que les suites $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et donner leur limite.
4. En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner leur limite.

Exercice 3.1- 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \frac{1}{2}u_n + 1. \end{array} \right.$$

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm, tracer la droite (D) d'équation $y = x$ et droite (D′) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$. En utilisant (D′) et (D), représenter sur ce graphique les points P, Q, R, S, T, U, V, de coordonnées respectives :
$(u_0\ ;\ 0), (u_0\ ;\ u_0), (u_0\ ;\ u_1), (u_1\ ;\ u_1), (u_1\ ;\ u_2), (u_2\ ;\ u_2), (u_2\ ;\ u_3)$.
3. Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $v_n = u_n - 2$.
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, en déduire l'expression de u_n fonction de n.
   (c) Calculer la limite de u_n.

Exercice 3.1- 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$$

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4,\ u_n \geqslant 0$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5,\ u_n \geqslant n - 3$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N},\ v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

Exercice 3.1- 7

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 0, \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$.

1. Montrer $v_n = u_n + 2n - 1$ est le terme général d'une suite géométrique.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 3.1- 8

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

1. On considère la suite p définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = u_n + v_n$.
   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
2. A l'aide de la question précédente, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.
3. Montrer que la suite $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$ est arithmétique.
   En déduire l'expression de z_n en fonction de n
4. Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 3.1- 9

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence : Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$et $v_0 = 1$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à 2.
2. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = v_n - \frac{4}{5}$$
   Utiliser la question qui précède pour montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.
3. Exprimer $x_n$en fonction de n.
4. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3.1- 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n\sqrt{2} - n$$
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. Calculer v_n en fonction de n
4. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 3.1- 11

On pose $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - 2u_n}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $u_n$existe et $u_n < 0$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n$est défini.
3. Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
4. Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, v_n en fonction de n.
5. Déterminer enfin u_n en fonction de n.
6. Ecrire un programme qui affiche tous les termes de la suite u jusqu'au rang N choisi par l'utilisateur.

Exercice 3.1- 12

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer u_3.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
   (c) En déduire sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \geqslant n$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Dans cette question on examine une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n + u_n$$
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n uniquement.
   (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n - n$.
3. (a) En reprenant la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout entier naturel n :
$$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$$
   (b) En déduire par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul
$$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$
   (c) Montrer finalement sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$
4. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est $\{0, 1, \cdots, N\}$ avec :

- $P(X = 0) = \frac{1}{2^N}$
- Pour tout entier naturel k de $\{1, \cdots, N\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Déterminer l'espérance de X en fonction de N.

Exercice 3.1- 13

Etudier le sens de variation de la suite définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{-n+1}{n+2}$$

Ecrire un programme qui, pour la suite (u_n) suivante, affiche le terme dont le rang sera choisi par l'utilisateur.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2 + \ln(n+1)$$

Exercice 3.1- 14

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+2} \end{cases}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n > 0$.
2. Calculer pour tout n, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. En déduire le sens de variation de u.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_n}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
4. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 3.1- 15

Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5u_n}{2u_n + 1}$$

et $0 < u_0 < 4$.

1. Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n$ existe et $u_n > 0$.
2. Soit f la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x}{2x + 1}$$
Déterminer ses variations.
3. En déduire $f([0; 4])$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 4]$
5. En déduire la monotonie de u.

Exercice 3.1- 16

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 & = & 4 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = v_n - u_n$$

   (a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   (b) Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).
3. Après avoir étudié le sens de variation de suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.

   (b) En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3.1- 17

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$$

1. Étude de propriétés de la fonction f

   (a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[[$ l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution.

   (c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$.

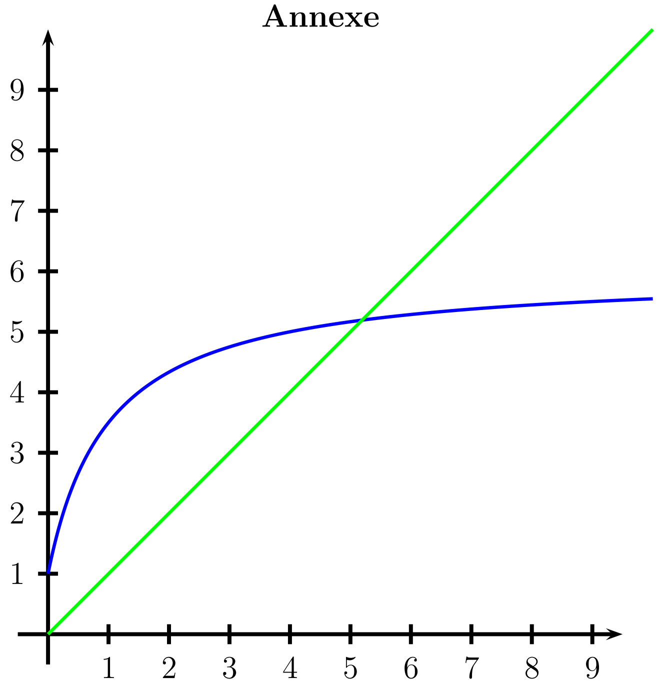
   (d) De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;\ +\infty[$.
2. Étude d'une suite (u_n).
   Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$$

   (a) Sur le graphique représenté dans l'annexe, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$. Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ;\ 0)$, et, en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.

(b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

Annexe



Exercice 3.1- 18

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - x\ln x$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Montrer que $v_n = n - n\ln n$.
   (b) En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
   (c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 3.1- 19 E ESC 2000

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.
   On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Calculer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0.

(c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T. Préciser les points d'intersection.

(d) Construire $\mathcal{C}$ et T .

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1} \end{cases}$

   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\dfrac{1}{p}) \leq \dfrac{1}{p+1}$.

   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (d) Vérifier que : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$

   (e) En déduire, par récurrence et à l'aide du 2.(b) que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   (f) Justifier l'inégalité pour tout entier $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \int\limits_{k-1}^{k} \dfrac{dx}{x}$.

   (g) En déduire que : pour $n \geqslant 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(n)$, puis que : pour $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln(n)$.

   (h) A l'aide des résultats, précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Exercice 3.1- 20 T ESSEC 2001

On place sur un compte rémunéré au taux d'intérêt annuel de 5% une somme S_n au 1^{er} Janvier de l'année 0, puis on verse au 1^{er} Janvier de chacune des années suivantes la même somme S.
Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par S_n la somme (intérêts compris bien entendu) dont on dispose sur ce compte au 1^{er} Janvier de la $n^{ème}$ année de placement.

1. Expression de la somme S_n obtenue au premier Janvier de l'année n

   (a) Préciser les sommes S_0 et S_1.

   (b) Etablir pour tout nombre entier naturel n la relation $S_{n+1} = 1.05S_n + S$.

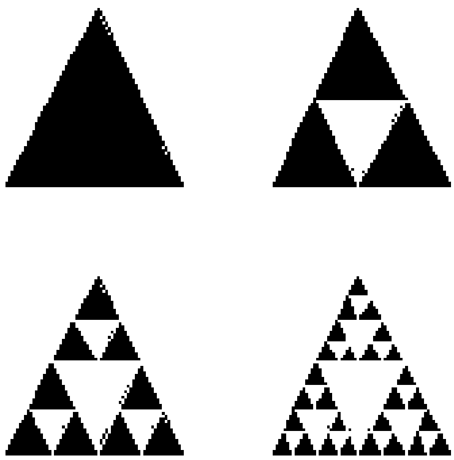
   (c) Pour tout nombre entier naturel n, on pose ici $T_n = S_n + 20S$.
   Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n, puis en déduire T_n et S_n en fonction de S et de n.

   (d) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $S_n \geqslant 15S$.
   On donne a cet effet à 10^{-2} près les égalités : $\ln(35) = 3,55$, $\ln(21) = 3,04$, $\ln(1,05) = 0,05$.

2. Modification du taux d'intérêt annuel du placement
   On reprend la situation précédente, mais le taux d'intérêt annuel est maintenant égal à 10% (et non plus à 5% comme précédemment).
   (a) Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n, puis en déduire S_n en fonction de S et de n.
   (b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $S_n \geqslant 15S$.
   On donne à cet effet à 10^{-2} près les égalités : $\ln(25) = 3,22, \quad \ln(11) = 2,40, \quad \ln(1,1) = 0,10$.

Exercice 3.1- 21 T HEC 2003

On considère un triangle équilatéral $A_0B_0C_0$ de longueur de côté 1, d'aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, peint en noir ; on désigne respectivement par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés $[B_0C_0]$, $[A_0C_0]$, $[A_0B_0]$ et on peint en blanc l'intérieur du triangle $A_1B_1C_1$. On effectue ensuite la même opération sur chacun des triangles encore noirs $A_0C_1B_1$, $C_1B_0A_1$, $B_1A_1C_0$ et ainsi de suite pour obtenir les figures suivantes :



Pour tout entier naturel n, soit t_n le nombre de triangles équilatéraux encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération, c_n le nombre total de leurs côtés, s_n le nombre total de leurs sommets et a_n la longueur de leur côté. On a donc : $t_0 = 1, \; c_0 = 3, \; s_0 = 3, \; a_0 = 1, \; t_1 = 3, \; c_1 = 9, \; s_1 = 6, \; a_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Expimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel n. Exprimer les nombres $t_{n+1}, \; c_{n+1}, \; s_{n+1}$ à l'aide des nombres $t_n, \; c_n, \; s_n$ et en déduire l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_{n+1} \\ c_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t_n \\ c_n \\ s_n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M \text{ est la matrice : } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Calculer M^2 et M^3.

(b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & u_n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 3\,u_n + 1$$

(c) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, u_n uniquement en fonction de n.

4. Utiliser les résultats de la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{cases} t_n & = & 3^n \\ c_n & = & 3^{n+1} \\ s_n & = & \dfrac{3}{2}(1+3^n) \end{cases}$$

5. Pour tout entier naturel n, on désigne par b_n le nombre de triangles équilatéraux déjà peints en blanc avant la $(n+1)$-ième opération.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - b_n$ en fonction de t_n, puis b_{n+1} en fonction uniquement de n.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'égalité :
$$1 + t_n + b_n - c_n + s_n = 2 \quad (relation d'Euler)$$

6. Pour tout entier naturel n, on note p_n la somme des périmètres des triangles encore noirs avant la $(n+1)$-ième opération et S_n la surface déjà peinte en blanc.
   (a) Exprimer p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n, et déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$.
   (b) Établir, pour tout entier naturel n l'égalité : $S_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)$.
   En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$. Ce résultat était-il prévisible ?
   (c) Montrer qu'il existe un réel D que l'on précisera, compris strictement entre 1 et 2 et vérifiant pour tout entier naturel n : $t_n = \left(\dfrac{1}{a_n}\right)^D$.
   La surface noire est connue sous le nom de Joint de Culasse de Sierpinsky ; D est appelé sa dimension fractale.

Exercice 3.1- 22 T Ecricome 2012

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par :

$$u_0 \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. étude de $(u_n)_{n\geq 0}$

(a) Soit $x \geq 1$. Etablir les inégalités suivantes : $1 \leq f(x)$ et $f(x) \leq \dfrac{x+1}{2}$.

(b) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n$.
En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq \dfrac{u_n+1}{2}$.

(c) Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq 1 + \dfrac{1}{2^n}(u_0 - 1)$.

(d) Démontrer la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et donner la valeur de sa limite.

2. Asymptote à $\mathcal{C}_f$

On pose $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.

(a) Donner la valeur de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(b) Calculer a et b.

(c) Montrer qu'il existe un réel c tel que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f(x) - ax - b = \frac{c}{2x-1}$$

et donner la valeur de c.

(d) Prouver que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote $(\mathcal{D})$ dont on donnera une équation ainsi que la position de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3. Variations de f

(a) Ssoit $x \in [1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$.

(b) Préciser le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

(c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ainsi que la droite $(\mathcal{D})$ et la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.

4. Etude d'une réciproque

(a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

(b) Soit $t \in [1, +\infty[$. Prouver que l'équation $x^2 - 2tx + t = 0$ (d'inconnnue x) admet des solutions réelles et les donner.

(c) Soit $t \in [1, +\infty[$. Déterminer l'unique réel $x \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = t$.

3.2 Point fixe

Exercice 3.2- 1 T ECRICOME 2002, extrait

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$

1. Etudier le signe du trinôme $P(x)$ défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^2 - x + 1$
   En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Etudier f, préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. Comportement de C au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que, pour tout x strictement positif :
   $$f(x) - x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$ ainsi qu'une équation de (Δ) asymptote à (C) en $+\infty$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$
5. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$
6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$
7. Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
8. Ecrire un programme qui affiche les termes de la suite u jusqu'à un rang choisi par l'utilisateur.

Exercice 3.2- 2

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0.$

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^\times$.
4. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{2}$. En déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(0)$.
5. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^x - e^x + 1$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).

   On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$.
7. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = f(-x)$.
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

8. En déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
9. Écrire un programme en `Pascal` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \leqslant 10^{-3}$, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 3.2- 3

On donne : $0,69 < \ln 2 < 0,70$. **Partie A** On considère l'application :

$$g :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x^2 + \ln x$$

1. Montrer que g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une solution et une seule. On note α l'unique solution de cette équation.
3. Montrer que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Partie B On note $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère l'application :

$$f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$$

1. (a) Montrer que f est strictement croissante sur I.
   (b) Montrer : $\frac{1}{2} < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(1) < 1$.
   (c) En déduire : $\forall x \in I, \quad f(x) \in I$.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Calculer u_1
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in I$
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

Exercice 3.2- 4 T HEC 2000

1. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Montrer que l'équation $x = \sqrt{x} + a$ possède une unique solution réelle positive ou nulle qu'on précisera. On note $l(a)$ cette solution. Préciser la valeur de $l(1)$ et comparer, suivant les valeurs de a, les réels $l(a)$ et $l(1)$.
   (b) Étudier les variations de la fonction f_a définie, pour tout réel x positif ou nul, par :
   $$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a$$
   Donner son tableau de variation (on placera la valeur $l(a)$ dans ce tableau).
   Quel est, suivant la valeur de x, le signe de $f_a(x)$?

2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et, pour tout entier naturel n non nul, par la relation de récurrence :
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$
Justifier l'inégalité $u_2 > 1$.
Soit n un entier naturel au moins égal à 2 vérifiant $u_n > 1$; établir l'inégalité $u_{n+1} > 1$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement minorée par 1.
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors sa limite est 1.
4. Dans cette question, on suppose vérifiée la propriété suivante :
$$(H) \quad \text{Pour tout entier naturel non nul, } u_n \leq l\left(\frac{1}{n}\right)$$
   (a) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $u_n \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $f_{\frac{1}{n}}(u_n)$ puis, à l'aide du tableau de variation de $f_{\frac{1}{n}}$, prouver que la suite est croissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel strictement supérieur à 1 et aboutir à une contradiction. Ainsi la propriété (H) n'est pas vérifiée.
5. On note m un entier naturel non nul vérifiant $u_m > l\left(\dfrac{1}{m}\right)$.
   (a) Établir l'inégalité : $u_{m+1} < u_m$.
   (b) Soit n un entier naturel au moins égal à m vérifiant $u_{n+1} < u_n$; établir l'inégalité $u_{n+2} < u_{n+1}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq m}$ est strictement décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 3.2- 5 T ESC 2003

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) & = 0 \\ f(x) & = \dfrac{x^2}{e^x - 1} \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm). **Partie A** Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α.
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie B

1. Rappeler $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

2. En déduire que f est continue et dérivable en 0.
   Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4. (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f , en y faisant apparaître le réel α défini au **A**,3).
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$, où α est le réel défini au **A**,3).
5. Tracer la courbe (C) en plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α. On donne $\alpha \approx 1,6$.

Partie C Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera une récurrence).
   (c) En déduire que la suite est convergente..
2. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0.
   On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
   (a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
   (b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.
3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.2- 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} = \exp(-x^2),$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. Etude d'une fonction :
   Déterminer le tableau de variation de f et sa parité.
   Préciser les points d'inflexions de sa courbe représentative (C).
   Tracer, dans un repère orthonormé (unité 4 carreaux), la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$. (On donne $\sqrt{2} \simeq 1,4$ et $e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,6$)
2. Etude d'une équation :
   Montrer que l'équation $(f(x) = x)$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution et une seule, notée a;
   Pour cela, on étudiera, sur $\mathbb{R}_+$, le sens de variation de la fonction g :

$$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = f(x) - x$$

   Vérifier que $0.6 < a < 0.7$.
   (On donne $f(0,6) \simeq 0,69$ et $f(0,7) \simeq 0,61$ à $0,01$ près.)

3. Etude d'une suite :
On définie une suite u par son premier terme $u_0 = 0,6$ et par la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer que si u_n est convergente alors sa limite vaut forcément a.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0,6 \leqslant u_n \leqslant 0,7$.
   (c) On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,6;0,7]$, on a
   $$|f'(x)| \leq 0,86$$
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a
   $$|u_{n+1} - a| \leqslant 0,86\,|u_n - a|$$
   puis que
   $$|u_n - a| \leqslant (0,1).(0,86)^n$$
   (d) En déduire la convergence de la suite u et sa limite.
4. Turbo Pascal :
Ecrire, en Turbo-Pascal, un programme qui calcule les N premiers termes de la suite u (pour une valeur de N laissé au choix de l'utilisateur) et affiche la valeur approchée de a ainsi obtenue.
5. Accélération de la convergence vers a :
Soit v la suite définie par son premier terme : $v_0 = 0,6$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = h(v_n)$$
avec h la fonction $h : x \mapsto k \times g(x) + x$, où k est une constante appartenant à $]0;1[$.
Ainsi,
$$v_{n+1} = k.g(v_n) + v_n$$
et, puisque $g(x) = f(x) - x$, on a
$$\begin{aligned} h(x) &= k.(f(x) - x) + x \\ &= kf(x) + (1-k)x. \end{aligned}$$
   (a) Montrer que si v_n tend vers une limite l, alors $l = a$.
   On admet que pour $k = \dfrac{-2}{g'(0,6) + g'(0,7)}$, on a
   $$\forall x \in [0,6;0,7], \quad |h'(x)| \leqslant 0,0056.$$
   (b) Montrer que :
   $$\forall x \in [0,6;0,7], \quad h(x) \in [0,6;0,7]$$
   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$|v_n - a| \leqslant (0,1).(0,0056)^n$$

3.3 Accroissements finis

Exercice 3.3- 1 T ECRICOME 2003

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x + 2 - 2\ln(e^x + 1)$ et on note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonorrnal.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & f(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Justifier le fait que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout x réel, on a : $f(x) = -x + 2 - 2\ln(e^{-x} + 1)$.
   En déduire que f est paire sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que la droite D d'équation : $y = -x + 2$ est asymptote à C et étudier la position de la courbe C par rapport à l'asymptote D.
5. Donner le tableau de variations de f.
6. Déterminer la solution, notée α, de l'équation $f(x) = x$.
7. Montrer que pour tout x réel : $f"(x) = -2\dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$
8. En déduire que : $\forall x \in [0, 1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{e-1}{e+1}$
9. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} près suivantes :
   $$f(0) \simeq 0,61 \quad f(1) \simeq 0.37 \quad \ln(e-1) \simeq 0,54$$
   Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0, 1]$
10. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant (\dfrac{e-1}{e+1})^n$.
11. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel à préciser.

Exercice 3.3- 2

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln x}$$

1. (a) Montrer que le domaine de définition de f est l'intervalle $]0, e^2]$.
   (b) Déterminer les limites de f aux bornes de ce domaine.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
3. Montrer que l'image par f de l'intervalle $[1, e]$ est contenue dans l'intervalle $[1, e]$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique a sur l'intervalle $[1, e]$.
   (On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2)$.
5. On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par :
   $$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Montrer à l'aide de l'inégalités des accroissements finis que :

$$|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$

(b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - a| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (e-1)$$

(c) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

(d) Ecrire un programme qui affiche une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

Exercice 3.3- 3

Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3+u_n^2)$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{5}(3+x^2)$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,1]$ et montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable par f.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle [0,1]. Soit r la solution.
   (c) Montrer que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - r|$ puis $|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Expliciter un rang n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - r| \leqslant 10^{-3}$.
   (d) En déduire la limite de la suite u.

Exercice 3.3- 4 T ESC 2002

Partie A : étude de f

Soit la fonction f définie $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x + 1 + 2\frac{\ln x}{x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal, l'unité de longueur étant 2 cm. On pose pour tout réel x strictement positif : $u(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

1. Etudier les branches infinies de (C). On montrera que la courbe admet pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite (D) d'équation $y = x + 1$.
2. Etudier le sens de variation de u. En déduire le signe de u sur $]0;+\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $u(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Construction de la courbe (C) :
6. (a) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x+1$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   (c) Tracer (D), (T) et (C) (On placera les points de la courbe d'abscisse $\frac{1}{2}, 1, e, 4$).
   On donne : $f(e) \approx 4,5; \quad f(1/2) \approx -1,3; \quad f(4) \approx 5,7$.

Partie B : approche de la solution de l'équation f(x) = x.

On admet que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique dans $]0;1]$, notée α et on se propose d'approcher α par une suite récurrente.
Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout}\, n \in N,\; u_{n+1} = g(u_n) = e^{-\dfrac{1}{2}u_n} \end{cases}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $x = g(x)$. Que vaut donc $g(\alpha)$?
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Calculer $g'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$
5. Montrer alors que, pour tout entier naturel n, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.3- 5

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times,\quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times,\quad \varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln(x)$$

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, g(x\;;y) = xe^y - ye^x$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

2.1 Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.

6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
   (a) Donner la valeur de x_0.
   (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
8. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$
   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) On donne $\varphi(\dfrac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que
   $$\varphi\left(\left[\frac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2};2\right]$$
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que :
   $$\forall x \in \left[\frac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{9}$$
   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
   (e) Montrer successivement que pour tout entier n :
   $$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2$$
   $$|u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1|$$
   $$|u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n$$
   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).

2.2 Dérivées partielles de g.

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.
2. Calculer les réels : $r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1;1)$; $s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1;1)$; $t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1;1)$.

2.3 Programmation. Ecrire un programme en Turbo Pascal qui affiche une valeur approchée de x_1 à $0,01$ près en utilisant la suite (u_n).

Exercice 3.3- 6 T ECRICOME 2006

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. où f est la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.
On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes pour $f(x)$ et e^{-x} :

x	-1	$-0,5$	$0,5$	1	$1,5$	2	3	4	5
$f(x)$	0	$0,41$	$1,36$	$1,47$	$1,39$	$1,21$	$0,80$	$0,45$	$0,24$
e^{-x}	$2,71$	$1,65$	$0,61$	$0,37$	$0,22$	$0,14$	$0,05$	$0,02$	$0,01$

1. Déterminer la fonction dérivée f'de f.
2. Déterminer le tableau de variation de f sur$[-1, +\infty[$.
3. Prouver, par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2}$.
4. Démontrer que,pour tout réel x appartenant à $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.
5. On note g la fonction définie sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ par $g(x) = f(x) - x$
   (a) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et montrer ainsi que g est décroissante sur $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.
   (b) Prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Exprimer$f(\alpha)$ en fonction de α.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.
8. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand tend n vers l'infini.
9. Ecrire un programme qui affiche une valeur approchée à 10^{-3} près de α.

Exercice 3.3- 7 T ECRICOME 2004

L'exercice se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ pour tout x réel par :

$$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$$

Partie 1 : Etude d'une fonction g intermédiaire. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0, \qquad g(t) = \frac{t}{t+1} - \ln(1+t)$$

1. Déterminer la fonction dérivée g' de g et en donner son signe sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire les variations de la fonction g et montrer que :

$$\forall t \geqslant 0,\ g(t) \leqslant 0$$

Partie 2 : Etude de la fonction f

1. Démontrer que l'on a , pour tout x réel : $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$
2. Etudier alors les variations de la fonction f (on ne demande pas ici le calcul des limites).

3. Sachant que $\ln 2 \simeq 0.69$ et que $\dfrac{\ln(1+e)}{e} \simeq 0.48$, montrer que l'on a, pour tout x de l'intervalle $[0,1]$:
$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

Partie 3 : Convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Justifier que pour tout x de $[0,1]$:
$$|f'(x)| \leqslant |g(e)|$$
2. On considère la fonction h définie sur $[0,1]$ par : $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que h est une fonction strictement décroissante sur $[0,1]$.
   (b) Prouver que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0,1]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$
4. Montrer que, pour tout n entier naturel :
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant |g(e)| \, . \, |u_n - \alpha|$$
   Ainsi que :
$$|u_n - \alpha| \leqslant |g(e)|^n$$
5. Sachant que $|g(e)| < 0.6$, déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Ecrire un programme qui fournit tous les termes de la suite u jusqu'à ce que l'écart entre deux termes consécutifs soit inférieur à une quantité *epsilon* choisie par l'utilisateur.

Exercice 3.3- 8

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution positive de l'équation :
$$2e^{-x} - e^{-2x} = x$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$par $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$.
On donne $f(1/2) \simeq 0,84$ et $f(1) \simeq 0,60$

1. Etudier les variations de f ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. Construire la courbe représentative de f (sur $\mathbb{R}^+$).
3. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive notée α et que $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

4. Montrer que si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$0 \leq x - x^2 \leq 1/4$$

5. En déduire que, pour tout x de $[1/2, 1]$, on a

$$|f'(x)| \leq 1/2$$

6. Soit u la suite définie par : $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout n entier,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

   (b) En déduire que pour tout n entier,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

   (c) Montrer enfin que la suite u est convergente et préciser sa limite.
7. Ecrire un programme en PASCAL qui calcule une valeur de u_n qui soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
   On stockera pour cela les valeurs successives de $u_n$dans une variable U et celles de $1/2^{n+1}$dans p.

Exercice 3.3- 9

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
On définit la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{lcl} u_0 & = & \frac{1}{2} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{array} \right.$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier les branches infinies de la représentation graphique de f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$
5. Majoration de la valeur absolue de f' sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$
   (b) Montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad f(x) \geqslant \sqrt{\frac{3}{4}}$
   (c) En déduire que $\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$
6. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , u_n \in [\frac{1}{2}; 1]$
7. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
8. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leqslant (\frac{1}{\sqrt{3}})^n |u_0 - 1|$
   (b) Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 3.3- 10 E ESC 2006

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x$$

Pour chaque entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère l'équation notée (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

1. (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les limites aux bornes.
   (b) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.
2. Dans cette question on note $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite ainsi définie :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel } k,\ u_{k+1} = e^{u_k} - 2 \end{cases}$$

   (a) On rappelle que α_2 est le réel strictement négatif obtenu à la question 1.(b) lorsque $n = 2$
   Calculer $g(-1)$ et $g(-2)$ puis montrer que $2 \leqslant \alpha_2 \leqslant -1$.

   (b) Justifier que $e^{\alpha_2} - 2 = \alpha_2$.
   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel

$$\alpha_2 \leqslant u_k \leqslant -1$$

   (c) En utilisant l'inégalité des accroissements finis avec une fonction adéquate, montrer que pour tous réels a et b tels que $a \leqslant -b \leqslant -1$,

$$0 \leqslant e^b - e^a \leqslant \frac{1}{e}(b - a)$$

   (d) Montrer que pour tout entier naturel k,

$$u_{k+1} - \alpha_2 = e^{u_k} - e^{\alpha_2}$$

   En déduire par récurrence sur k que pour tout entier naturel k :

$$0 \leqslant u_k - \alpha_2 \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

   (e) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente et de limite α_2.

   (f) On considère le programme Turbo-Pascal suivant :
   (où `trunc` désigne la fonction partie entière)

```
program ex2 ;
var N, k : integer ;
var epsilon, u : real ;
begin
writeln ( ' Donnez un reel strictement positif') ;
readln (epsilon ) ;
N := trunc ( - Ln (epsilon ) ) + 1 ;
u := -1 ;
```

```
for k := 1 to N do begin
........................... ;
end ;
end.
```

Montrer que l'entier naturel N calculé dans ce programme vérifie :

$$\left(\frac{1}{e}\right)^N \leqslant \text{epsilon}$$

Compléter la partie pointillée de ce programme afin que la variable `u` contienne après son exécution une valeur approchée de α_2 à epsilon près.

3. On revient au cas général où $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$.
   En déduire $(\ln(2n)) \geqslant n$ (on donne $\ln 2 \simeq 0,69$).
   (b) En déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$, puis établir $\beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 3.3- 11 T ECRICOME 2005

On note φ la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$$

1. Etudier le signe du quotient $\dfrac{1+x}{1-x}$ suivant les valeurs du réel x.
2. Justifier que l'ensemble de définition de φ est l'intervalle $I =]-1,1[$.
3. Montrer que φ est impaire.
4. Démontrer que pour x dans I,

$$\varphi'(x) = 2\frac{x^2}{1-x^2}$$

5. En déduire le tableau de variation de φ en précisant les limites de φ en 1 et en -1.
6. (a) Quel est le signe de $\varphi(x)$ sur l'intervalle I ?
   (b) Calculer la dérivée seconde de φ sur I.
   (c) En déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \varphi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$$

   (d) Etudier la convexité de φ.
7. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$

(a) On donne $\ln 3 < 1,1$.
Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$ alors $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

(b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}\,|u_n|$$

Puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\right]^n$$

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.3- 12 T ESC 2012

Partie I - Etude d'une fonction Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x} - 1$ et $\mathcal{C}$ sa representation graphique dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Etabir que $\mathcal{C}$ admet une droite asymptote $\mathcal{D}$ au voisinage de $+\infty$ et préciser une équation de $\mathcal{D}$.
   (c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Que pouvez-vous en déduire sur la courbe $\mathcal{C}$?
2. Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. (a) Etablir que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée α.
   (b) Justifier que $\alpha \in [1, 2]$. *On pourra utiliser les valeurs approchées :* $e^{-1} \simeq 0{,}4$ *et* $e^{-2} \simeq 0{,}1$
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$ en y faisant figurer le réel α. *On pourra utiliser la valeur approchée* $\alpha \simeq 1{,}3$

Partie II - Approximation de $\boldsymbol{\alpha}$ On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x} + 1$. On définit également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet comme unique solution sur $\mathbb{R}$ le réel α défini en I.3.
2. Montrer que, pour tout réel x de $[1, 2]$, $\quad -\dfrac{1}{e} \leq h'(x) < 0$.
   En déduire que, pour tout réel x de $[1, 2]$, $\quad |h'(x)| leq \dfrac{1}{e}$.
3. (a) Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.
   On pourra utiliser les valeurs approchées suivantes : $h(1) \simeq 1{,}4$ *et* $h(2) \simeq 1{,}1$.

4. (a) Enoncer avec précision le théorème de l'inégalité des accroissements finis.
   (b) Etablir que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{e^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

3.4 Adjacentes

Exercice 3.4- 1

Soient a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_{\ 0} = a, v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
5. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3.5 Implicite $f_n(x) = 0$

Exercice 3.5- 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et (C_n) est sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. (a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n)

(c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n).

(d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1.

3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

(b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.

(c) En déduire la limite de la suite (u_n)

(d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.

Exercice 3.5- 2

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}^+$, on la notera u_n.
3. Calculer $f_n\left(\frac{2}{3}\right)$ et vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
4. Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
5. En évaluant l'inégalité précédente en $x = u_n$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
6. Quelle est alors la monotonie de la suite (u_n) ?
7. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3.5- 3 T ECRICOME 2010

Dans cet exercice, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ , \ f(x) = xe^{-x}.$$

I. Étude de la fonction f. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

(b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

2. (a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$?

(b) Étudier la convexité de f

II. Étude d'une famille d'équations. Dans cette partie on s'intéresse aux solutions positives ou nulles (si elles existent) de l'équation

$$(E_n) \ \ f(x) = x^n$$

où n désigne un entier naturel non nul.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation (E_1)
2. Pour n entier naturel avec $n \geq 2$, on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = e^{-x} - x^{n-1}$$

   (a) Montrer que g_n est une fonction strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   On note cette solution α_n

   (c) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ \alpha_n \in]0\ ;\ 1[$.

   (d) Donner le signe de $g_{n+1}(\alpha_n)$ et en déduire que (α_n) est une suite croissante.

   (e) Conclure quant à la convergence de (α_n).

3. Donner, pour $n \geq 2$, l'ensemble des solutions positives de l'équation (E_n).

Exercice 3.5- 4

Soit n un entier naturel non nul. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x \exp\left(-\frac{n}{x}\right) \ \textit{si } x \neq 0 \textit{ et } f_n(0) = 0$$

1. (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

   (b) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur du nombre dérivé à droite en 0 de f_n.

2. (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f_n'(x)$ puis étudier son signe.

   (b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variation de f_n.

3. (a) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.

   (b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation $x\ln(x) = n$.

   (c) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1}, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   (d) Justifier la relation $\ln u_n + \ln(\ln u_n) = \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

4. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

   (b) Montrer que : $f_n(u_{n+1}) = \exp(\dfrac{1}{u_{n+1}})$.

5. On pose $I_n = \int\limits_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(t)dt$.

   (a) Montrer que : $1 \leqslant \dfrac{I_n}{u_{n+1} - u_n} \leqslant \exp(\dfrac{1}{u_{n+1}})$.

   (b) En déduire un équivalent de I_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.5- 5

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = x^3 + 5x - 1$
   (a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $x^3 + 5x - 1 = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$. puis établir que $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout entier strictement positif n, on considère l'équation
$$(E_n) : x^3 + 5x = 1 + \frac{1}{n}$$
   (a) Justifier que pour tout entier n, l'équation (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$. On note α_n cette solution.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) Justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \alpha_n \geqslant \alpha$.
   (d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (e) Déterminer sa limite.
3. Pour tout entier naturel n, on considère l'équation
$$(F_n) : x^n + 5x - 1 = 0$$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation (F_n) admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On note β_n cette solution.
   (b) Démontrer que $\forall n \geqslant 0, \quad 0 < \beta_n \leqslant \dfrac{1}{5}$.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\beta_n)^n = 0$.
   (c) En utilisant l'équation satisfaite par β_n, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n$.
   (d) On souhaite déterminer la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$.
   Pour cela, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^n + 5x - 1$.
      i. Montrer que $\forall x \in]0,1[, \quad f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
      En déduire le signe de $f_{n+1}(\beta_n)$.
      ii. Que vaut $f_{n+1}(\beta_{n+1})$?
      En déduire $\forall n \geqslant 0, \quad f_{n+1}(\beta_n) < f_{n+1}(\beta_{n+1})$
      iii. Quelle est la monotonie de la suite $(\beta_n)_n$?

Exercice 3.5- 6 T ESSEC 2001

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$ où l'inconnue x est recherchée dans $[0, +\infty[$ seulement. On étudiera (E_n) à l'aide de la fonction auxiliaire f :
$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$

1. Existence et unicité d'une racine positive x_n de (E_n)
   (a) Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$

   (b) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geqslant 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n, et montrer que $0 < x_n < 1$ pour $n \geqslant 1$.

2. Etude de la fonction auxiliaire.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f et les limites de f aux extrémités de celuici.
   (b) Calculer alors $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.
3. Etude de la suite (x_n)
   (a) Montrer que $f(x_n) = n$ pour $n \geqslant 1$.
   (b) Montrer l'inégalité $x_n < x_{n+1}$ pour $n \geqslant 1$.
   (c) En déduire la convergence de la suite (x_n) vers un nombre réel L, et préciser la valeur de L.

3.6 Implicite $f(x) = n$

Exercice 3.6- 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 3$. On note (E_n) l'équation

$$(E_n) : \frac{x^3}{x^2 - 1} = n$$

1. Etudier la fonction
$$f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 - 1}$$
   sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
   On donne $\sqrt{3} \approx 1,7$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution, que l'on notera x_n, sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Montrer que
$$\forall n \geqslant 3, \quad n - 1 \leqslant x_n \leqslant n$$
4. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_n$?

Exercice 3.6- 2 T ECRICOME 2001

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto e^x - x$.

1. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
   (b) Etudier les branches infinies de f.
2. Dresser le tableau de variations de f.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, l' équation $f(x) = n$ admet deux solutions de signes contraires. La solution positive sera notée a_n.
4. Etudier les variations de la suite $(a_n)_{n>1}$
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a l'inégalité : $a_n \geqslant \ln n$.
6. En déduire la limite de la suite(a_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.6- 3

Considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$

1. (a) Justifier que f est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$
   (b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
2. (a) Montrer que l'inage par f du segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.
   (b) On définit la fonction $\varphi : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{1}{2}\right] & \to & \left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right] \\ x & \to & 2\sqrt{x}e^{-x} \end{array}$ Démontrer que φ admet une fonction réciproque continue que l'on notera g.
   (c) Dresser le tableau des variations de g.
3. (a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x : $g(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0, \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$. On notera a_n cette solution.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0.
4. On considère la fonction de deux variables réelles h définie par :

$$h(x, y) = e^{-x}\sqrt{x + y}$$

   (a) Déterminer le domaine de définition de h.
   (b) Calculer les dérivées partielles premières.
   (c) Pour tout x réel positif calculer $h(x, 0)$.Que remarque-t-on ?

Exercice 3.6- 4 T ECRICOME 2011

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout réel} x,\ f(x) = e^x - e^{-x}$$

et la résolution d'une équation. On note C_f la courbe représentative de f.

1. (a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
   (b) Donner les valeurs suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?

2. (a) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
   (b) Construire le tableau de variation de f .
   (c) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
   (d) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0. On note cette droite T.
3. (a) Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion que l'on précisera et étudier la convexité de f.
   (b) Construire sur un même schéma C_f et T.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère dans cette question l'équation (E_n)d'inconnue x : $f(x) = n$.
   (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n (on ne cherchera pas ici à calculer u_n). Préciser la valeur de u_0.
   (b) Soit n un entier naturel non nul, calculer $f(\ln(n))$ et en déduire que $u_n \geq \ln(n)$. Quelle est la limte de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
   (d) A l'aide du changement de variable $t = e^x$,déterminer la solution u_n de l'équation (E_n) pour n entier naturel.