

Chapitre 2

Fonction



2.1 Etude

Exercice 2.1- 1

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites
 - (a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.
 - (b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
 - (c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Étude des variations de la fonction f
 - (a) Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

- (b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

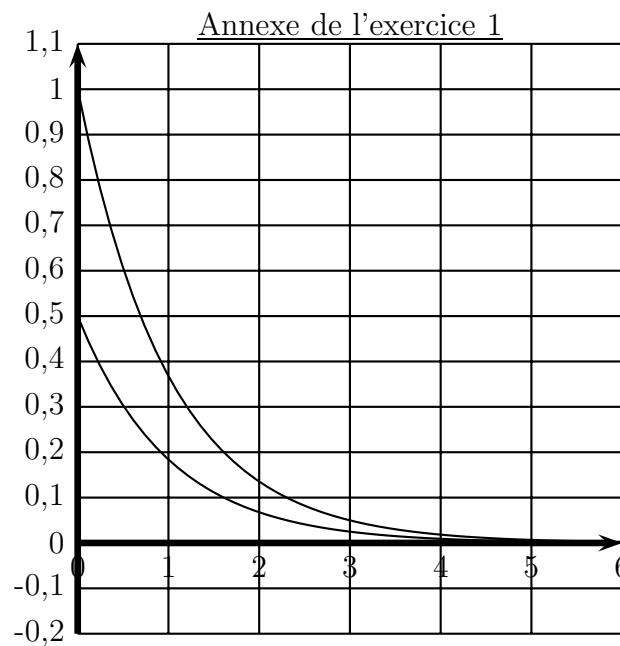
Exercice 2.1- 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

et on désigne par Γ sa courbe représentative.

1. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $e^{-x} \leq e^x$.
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
4. On considère les fonctions g et h définies sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{e^x}$ et $h(x) = \frac{1}{2e^x}$.
Sur l'annexe sont tracées les courbes représentatives de g et h , notées respectivement Γ_1 et Γ_2 .
(a) Démontrer que, pour tout réel x positif ou nul, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.
(b) Que peut-on en déduire pour les courbes Γ , Γ_1 , et Γ_2 ? Tracer Γ sur l'annexe, en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.



Exercice 2.1- 3

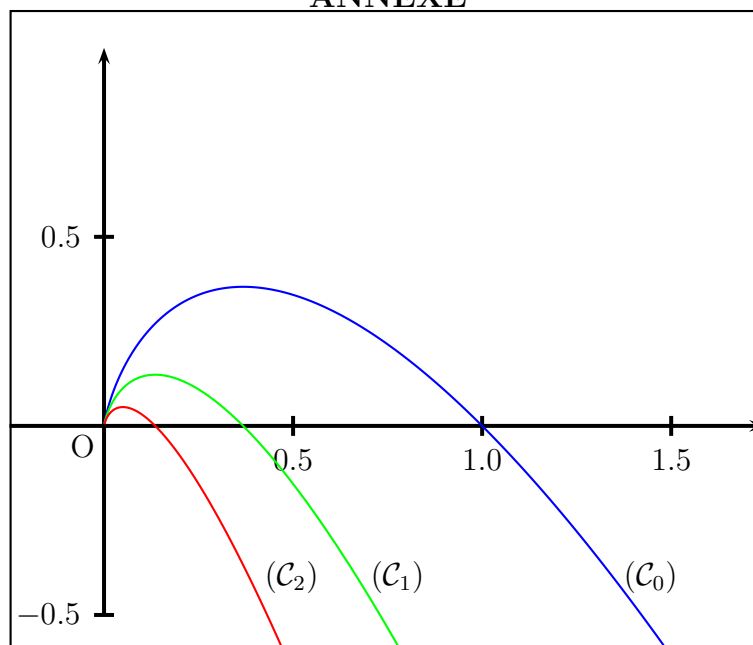
Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = -nx - x \ln x.$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n , dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0 , f_1 et f_2 sont données en annexe.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0 ; +\infty[$.
3. Démontrer que pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n .
4. (a) Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
 (b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
 (c) Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2 .
5. (a) Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n , dont l'abscisse est e^{-n} .
 (b) Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n .
 (c) Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2 .

ANNEXE

**Exercice 2.1- 4**

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; 1]$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. T est la droite d'équation $y = x$.

1. (a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
 (b) En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0 ; 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$, on a $f(x) \leq 1$.

2. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$.
 (b) Vérifier que la droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0 ; 1]$ par

$$g(x) = 1 + x \ln x - x$$

- (a) Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et dresser le tableau de variation de g . On ne cherchera pas la limite de g en 0.
- (b) En déduire les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .

Exercice 2.1- 5

On considère la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 9} \right)$$

et (C) sa courbe représentative relative à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les images de 0 et de 4 par f , puis l'antécédent de 0 par f .
3. (a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
 (b) Montrer que, pour tout x réel,

$$\sqrt{x^2 + 9} + x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} - x}$$

et en déduire la limite de f en $-\infty$.

- (c) Déterminer les branches infinies de (C).
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

5. En déduire le tableau de variation de la fonction f .
6. On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par

$$g(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{9}{2}e^{-x}$$

et (C') sa représentation graphique dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- (a) Démontrer que, pour tout x réel, $(g \circ f)(x) = x$.
- (b) Démontrer que la fonction g est négative sur $[0; \ln 3]$.

Exercice 2.1- 6

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx} + 7}$$

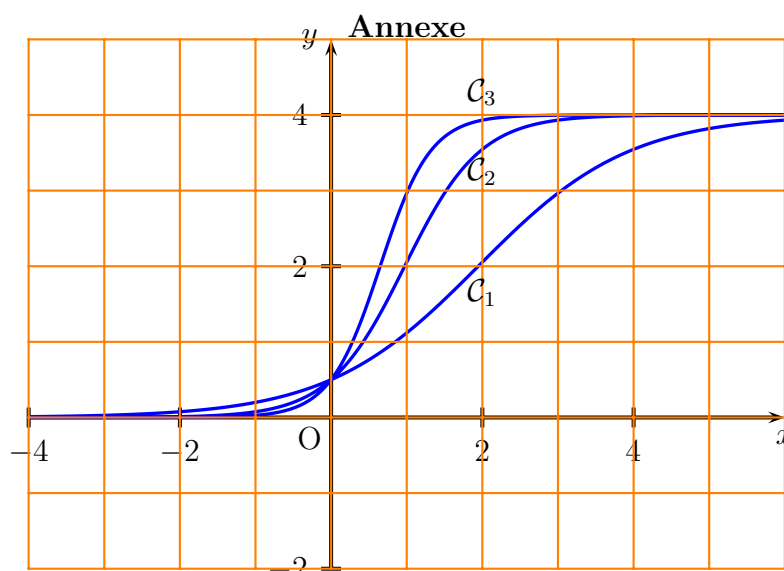
On désigne par $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont données en annexe. **Partie A :**

Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x + 7}$

- Vérifier que pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{4}{1 + 7e^{-x}}$.
- Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
 - Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - Démontrer que pour tout réel x , $0 < f_1(x) < 4$.
- Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\ln 7 ; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_1$.
 - Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point I_1 .
 - Tracer la droite (T_1) .

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n .

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_n$.
- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathcal{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.
 - Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathcal{C}_n$ au point I_n .
 - Tracer les droites (T_2) et (T_3) .



Exercice 2.1- 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées).

1. (a) Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = 1 + X - 2X^2$. Étudier le signe de $P(X)$.
 (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 (c) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
3. Vérifier que $f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. (a) Soit f' la fonction dérivée de la fonction f , calculer $f'(x)$.
 (b) Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(4 - e^x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
 (c) Dresser le tableau de variations de f . On montrera que le maximum est un nombre rationnel.
5. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.
 (b) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
6. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .
7. Tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$, puis la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 2.1- 8 T ECRICOME 2010

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

6. Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 2.1- 9

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm). **Partie A** Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α .
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie B

1. Rappeler $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
2. Déterminer la limite de f en 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4. (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
(b) En déduire le tableau de variations de f , en y faisant apparaître le réel α défini au **A,3**).
(c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$, où α est le réel défini au **A,3**).
5. Tracer la courbe (C) en plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α . On donne $\alpha \approx 1,6$.
6. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0.
On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
(a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
(b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
(c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.

Partie C Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).

Exercice 2.1- 10

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. **Partie**

A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : recherche d'une tangente particulière Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
2. Démontrer qu'une tangente à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0.$$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation. Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2 e^{x-1} = 0.$$

4. Donner alors une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de la droite Δ . Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$ la droite Δ , la droite d'équation $(x = 1)$ et l'axe des ordonnées.
2. On pose $I = \int_0^1 x e^{x-1} dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \frac{1}{e}$.
3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 2.1- 11

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$$

Soit (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

Étude préliminaire**★ Mise en place d'une inégalité**

On considère la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - x$$

1. Etudier le sens de variation de g .
2. En déduire que, pour tout réel a positif ou nul,

$$\ln(1+a) \leq a$$

Partie A**★ Étude de la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par**

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x$$

1. Calculer $f_1'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_1 .
2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right).$$

En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1 .

Partie B**★ Étude et propriétés des fonctions f_k .**

1. Calculer $f_k'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le sens de variation de la fonction f_k .
2. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$,

$$f_k(x) = \ln\left(1 + k\frac{x}{e^x}\right)$$

En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

3. (a) Dresser le tableau de variation de f_k .
(b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a

$$f_k(x) \leq \frac{k}{e}$$

4. Déterminer une équation de la tangente (T_k) à (C_k) au point O.
5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p < m$. Étudier la position relative de (C_p) et (C_m) .
6. Tracer les courbes (C_1) et (C_2) ainsi que leurs tangentes respectives (T_1) et (T_2) en O.

Exercice 2.1- 12

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Partie A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2}$$

On notera C la représentation graphique de f et Γ celle de g .

On se propose de démontrer que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

1. Etudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)
2. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$$

3. Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera.

Partie B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions $x \mapsto kx$, majorant la fonction : $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0; +\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(1+x) - kx$$

1. Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x$$

2. Donner la valeur de f_1 en 0.
3. Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

$$\ln(1+x) \leq x$$

4. En déduire que si $k \geq 1$, alors : pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$
5. Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.

Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \frac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k . (L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6. En déduire que pour k dans $]0; 1[$, la propriété « pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$ » n'est pas vérifiée.

Exercice 2.1- 13

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5cm).

Partie A On considère la fonction f_1 définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_1(x) = xe^{-x^2}$$

et on appelle $\mathcal{C}_1$ sa courbe représentative.

1. Montrez que pour tout réel positif x ,

$$f_1'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

En déduire le sens de variation de f_1 .

2. Calculez la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Dresser le tableau de variation de f_1 .
4. On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminez la position de $\mathcal{C}_1$ par rapport à Δ .
5. Tracez $\mathcal{C}_1$ et Δ .

Partie B On considère la fonction f_3 définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_3(x) = x^3e^{-x^2}$$

et on appelle $\mathcal{C}_3$ sa courbe représentative.

1. Montrez que pour tout réel positif x , $f_3'(x)$ a même signe que $(3 - 2x^2)$. En déduire le sens de variation de f_3 .
2. Déterminez les positions relatives de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$.
3. Tracer $\mathcal{C}_3$ dans le même repère que $\mathcal{C}_1$ (on admettra que $\mathcal{C}_3$ a la même asymptote que $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$).

Partie C On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = x^n e^{-x^2}$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$.
On note α_n ce maximum.
2. On appelle S_n le point de $\mathcal{C}_n$ d'abscisse $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n , $\mathcal{C}_n$ passe par S_2 . Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.

3. Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1+\ln(\frac{x}{2})]}$$

c'est à dire

$$g(x) = \exp \left[\frac{x}{2} \left(-1 + \ln \left(\frac{x}{2} \right) \right) \right]$$

- (a) Étudier le sens de variation de g .
- (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$.
En déduire que tout point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

Exercice 2.1- 14 T ESC 2000

Soit f la fonction définie pour tout x réel par :

$$f(x) = (x^2 - x - \frac{3}{4})e^{2x}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
(Indication : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$)
- (b) C admet-elle des asymptotes ?.
2. (a) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer alors sa fonction dérivée f' et montrer alors que f' change de signe en $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- (b) Donner le tableau de variations de f .
3. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
- (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .
- (c) Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0.
4. (a) Tracer les tangentes à C aux points d'abscisses $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 0 et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
- (b) Tracer C et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.
On prendra : $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,1$; $f(-\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq 0,2$; $f(\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq -5,8$; $2e^{-1} \simeq 0,7$; $2e^3 \simeq 40$.
5. (a) Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{2x} dx$$

- (b) On pose $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

Déterminer les réels a , b , c tels que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(c) Calculer l'intégrale suivante

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx$$

(d) Déterminer, en cm^2 , l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère choisi à la question 4. telles que $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Hachurer cet ensemble sur le graphique précédent.

Exercice 2.1- 15 T ECRICOME 2002

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

et on note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

1. Etudier le signe du trinôme $P(x)$ défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^2 - x + 1$.
En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier f , préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
3. Comportement de C au voisinage de $+\infty$
 - (a) Montrer que ,pour tout x strictement positif :

$$f(x) - x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}}$$

- (b) En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ainsi qu'une équation de (Δ) asymptote à (C) en $+\infty$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$
5. Majoration de la valeur absolue de f' sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$
 - (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$
 - (b) Montrer que

$$\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$$

(c) En déduire que

$$\forall x \in [\frac{1}{2}; 1], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exercice 2.1- 16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à expliciter.
2. On note g sa réciproque. Donner le domaine de définition de g , est-elle continue? Dérivable? Quel est son sens de variation?

Exercice 2.1- 17

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{n}{x}\right) \ln(x) + \frac{3-n}{x}$$

1. Déterminer les limites de f_n en $+\infty$ et 0.
2. Montrer que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$.
3. Soit g_n la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g_n(x) = n \ln x + x - 3$
 - (a) Étudier les variations de g_n .
 - (b) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ possède une solution unique α_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - (c) Étudier le signe de $g_n(x)$ sur $]0; +\infty[$.
4. Étudier les variations de f_n .

Exercice 2.1- 18

On considère le fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par

$$f(x) = 1 - e^{-x}$$

1. Etude de f
 - (a) Dresser le tableau de variations de f .
 - (b) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) \leq x$$
 - (c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.
2. Etude d'une suite
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = 1 - e^{-u_n}$$
 - (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq 1$$
 - (b) Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ (on pourra utiliser la question 1.b)

Exercice 2.1- 19

L'objet du problème est l'étude de l'équation $f(x) = x$, où la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - e^{-2x}$$

1. Étude de la fonction f .

- (a) Étudier les variations de f et déterminer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$.
- (b) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f .
- (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
 - Étudier les variations de g et ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Établir que l'équation $g(x) = 0$ a, outre la solution $x = 0$, une solution α et une seule.
 - Montrer que α appartient à $]\frac{\ln 2}{2}; 1[$.
 - Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant figurer la droite d'équation $y = x$ et α .

2. Étude d'une suite récurrente.

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 = 2$ et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$

- (a) Établir par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\alpha < u_n$.
 - (b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Écrire en PASCAL un algorithme permettant le calcul de u_n pour un entier n fourni par l'utilisateur.

Exercice 2.1- 20

Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$.
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

- 1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- (b) En déduire la nature de la branche infinie de C en $+\infty$.
- 2. (a) Résoudre dans $[1, +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geq 0$.
- (b) En déduire que $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = e$.
- (c) Donner le tableau de variation de f .
- 3. (a) Donner les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 1 et e .
- (b) Construire C ainsi que ses tangentes remarquables et asymptotes éventuelles dans un repère orthonormé d'unité 3 cm.
On prendra : $e \simeq 2,7$, $\frac{e}{e-1} \simeq 1,6$.
- 4. Soit a un réel strictement plus grand que 1.
 n désigne un entier naturel.
 - (a) Rappeler le signe de $\frac{\ln a}{a}$ et comparer le réel $\frac{\ln a}{a}$ au nombre 1.
 - (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln a}{a} \right)^n$.

(c) Pour tout réel x différent de 1, montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n x^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

(d) On pose, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln a}{a}\right)^{k-1}$.

Exprimer S_n en fonction de n et de $\frac{\ln a}{a}$.

(e) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = f(a)$.

Exercice 2.1- 21

On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$$

et (C) la courbe représentative de f .

1. Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
3. Vérifier que f est paire.
4. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
5. (C) admet-elle des asymptotes ?
6. Pour tout réel t , vérifier que

$$f'(t) = \frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + 2 + e^{-t})^2}$$

et en étudier son signe.

7. En déduire le tableau des variations de f .
8. Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f .
9. Vérifier que pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

10. On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t) dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1+e^a} - \frac{1}{1+e^b}$$

Exercice 2.1- 22

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1. Étudier le sens de variations de g sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$. On note α cette solution.
3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Étude de la fonction f et tracé de la courbe (C)

1. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$
 (b) En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout réel positif x , $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.
3. Établir que $f(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
5. (a) Établir que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$ avec $u(x) = e^x - xe^x - 1$
 (b) Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire le signe de $u(x)$.
 (c) Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
6. Tracer (C) et (T).

Exercice 2.1- 23

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f .
2. Donner la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1, +\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[1, \frac{3}{2}]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

On pourra prendre $e^{-1} < 0,4$.

Exercice 2.1- 24 T ECRICOME 2007

On considère la fonction f déterminée sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) = x^3 - x + 3 - 2 \ln x$.

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ que l'on déterminera.
2. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{P(x)}{x}$.
4. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.
5. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) > 0$.

Etude de la fonction f .

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f , notée $\mathcal{C}_f$?
2. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
(c) Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ) .
3. Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.
4. En déduire les variations de f .
5. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et tracer la droite (Δ) . On donne $f(0,5) = -3,3$ et $f(3) = 4,3$.

Exercice 2.1- 25

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (8x + 6)e^{-0,8x}$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Donner une interprétation graphique de cette limite.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. Dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
4. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$F(x) = -10(x + 2)e^{-0,8x}$$

est une primitive de la fonction f .

Exercice 2.1- 26

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

1. Questions préliminaires

(a) Déterminer le signe du trinôme $x^2 - x + 1$.

(b) En déduire le signe de $e^{2x} - e^x + 1$. (Indication : $e^{2x} = (e^x)^2$)

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$$

3. Etudier les variations de la fonctions f

4. Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ puis déterminer sa position relative.

5. En remarquant que $2x = \ln e^{2x}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$.

En déduire l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ puis déterminer sa position relative. (Rmq : question difficile!)

6. Tracer la courbe associée dans un repère orthonormé

Exercice 2.1- 27

Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5u_n}{2u_n + 1}$$

et $0 < u_0 < 4$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

2. Soit f la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 5x}{2x + 1}$$

Déterminer ses variations.

3. En déduire $f([0; 4])$.

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0; 4]$

5. En déduire la monotonie de u .

Exercice 2.1- 28

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Montrer que f est une fonction paire

3. Etudier les variations de f et préciser les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $2 \ln x$ quand x tend vers $+\infty$ (on pourra calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2 \ln(x)}$).
5. En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}$, représentation graphique de f , en $+\infty$.
6. Etudier la concavité de $\mathcal{C}$ et calculer les coordonnées des points d'inflexion.
7. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes à l'abscisse 0 et aux points d'inflexion. On donne $\ln 2 \simeq 0,7$.

Exercice 2.1- 29

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer les limites aux points considérés.

1. En 1 et en $+\infty$:

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$$

2. En 0 :

$$\frac{1 + x + x^2}{2^x}$$

3. En $+\infty$:

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$$

4. En $+\infty$:

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

5. En 0 et en $+\infty$:

$$\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{\frac{1}{3}}}$$

6. En 0^+ :

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2}$$

7. En 0^+ :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

8. En 0 et en $+\infty$:

$$\frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$$

9. En 0^+ :

$$\frac{x+2}{x^2 \ln(x)}$$

10. En 0 :

$$4x^2 + \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

11. En 0, en $+\infty$ et en 1 :

$$\frac{x + \ln(x)}{3 \ln(x)}$$

12. En 0^+ :

$$(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

13. En 2 :

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

14. En 2^+ :

$$(x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$$

15. En 1 :

$$\frac{\ln(x)}{x^3 - 1}$$

16. En $+\infty$:

$$x \ln \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

17. En 0 :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

18. En $+\infty$:

$$\frac{e^x - e^{(x^2)}}{x^2 - x}$$

2.2 Polynômes

Exercice 2.2- 1

Soit $P : x \mapsto 2x^4 - 8x^3 - 20x^2 + 56x - 30$.
Calculer $P(1)$ puis factoriser ce polynôme.

Exercice 2.2- 2

Factoriser les polynômes suivants

$$P : x \mapsto 3x^3 + 12x^2 - 33x - 90$$

$$Q : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

2.3 Continuité et dérivabilité

Exercice 2.3- 1

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(3x+1)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2.3- 2

Soit la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{20 - x^2} - 2}{x - 4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 4 par une fonction $\tilde{f}$.

Exercice 2.3- 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{2x + 3}{x - 1} \right)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer le tableau de variation de f .
3. Démontrer que f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $] \ln(2); +\infty[$.
4. Donner les propriétés de la fonction réciproque de f , dont sa dérivabilité.
5. Expliciter f^{-1} en résolvant dans $]1; +\infty[$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x pour $y \in] \ln(2); +\infty[$.

Exercice 2.3- 4

1. (a) Etudier sur l'intervalle $]0; +\infty[$ le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = x - \ln x$
 (b) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ on a : $h(x) > 0$.
2. On définit alors sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
 (a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
 (b) Montrer que f est continue.
 (c) Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 2.3- 5

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \frac{e^x - 1}{x} > 0$.
 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, puis préciser $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}^\times$.
4. (a) Étudier les variations de la fonction g définie par :
 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = xe^x - e^x + 1$.
 (b) En déduire le signe de $g(x)$, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
 On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
6. (a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = f(-x)$.
 (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
 (c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
7. Écrire un programme en **Pascal** qui calcule tous les termes de la suite u jusqu'au rang n choisi par l'utilisateur, dans le cas où $u_0 = 1$.

Exercice 2.3- 6

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C la courbe représentative de f .

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
 (b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln x \leq x + 1$.
 (b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe. Préciser le sens de variation de f .
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 (b) Étudier la nature de la branche infinie de C en $+\infty$. On pourra chercher un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
4. (a) Préciser l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
 (b) Construire C et T dans un repère orthonormé.

Exercice 2.3- 7

On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x \ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1$$

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) \simeq$	-0,4	0	0,6	1,6	3	4,7	6,9	9,5

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. (a) Justifier que pour tout entier naturel k , il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
 (b) Donner la valeur de x_0 .
 (c) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2 .
 (d) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

Exercice 2.3- 8

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = e^{-1/x^2}$$

- (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
 - (c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
 - (d) Acheter l'étude des variations de f , dresser son tableau de variations, construire sa courbe représentative ainsi que la tangente à cette courbe à l'origine.
2. Etude d'une suite. Soit u la suite définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 - (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0, 1[$.
 - (b) Montrer par récurrence que la suite u est strictement décroissante. (On prendra $u_1 \simeq 0.9$.)

On se propose de démontrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$

- (b) On définit pour tout entier naturel n non nul, la fonction polynôme P_n , par : $\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R} P_{n+1}(x) = x^3 P'_n(x) + (2 - 3nx^2) P_n(x)$.

Calculer $P_2(x)$ et vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^6} f(x)$.

Montrer par récurrence sur n , $n \in \mathbb{N}^*$, que : $\forall x \in \mathbb{R}^* f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x)$.

- (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) = 2^n$

- (d) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$

- (e) Montrer par récurrence que $n \in \mathbb{N}^*$, que f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.3- 9

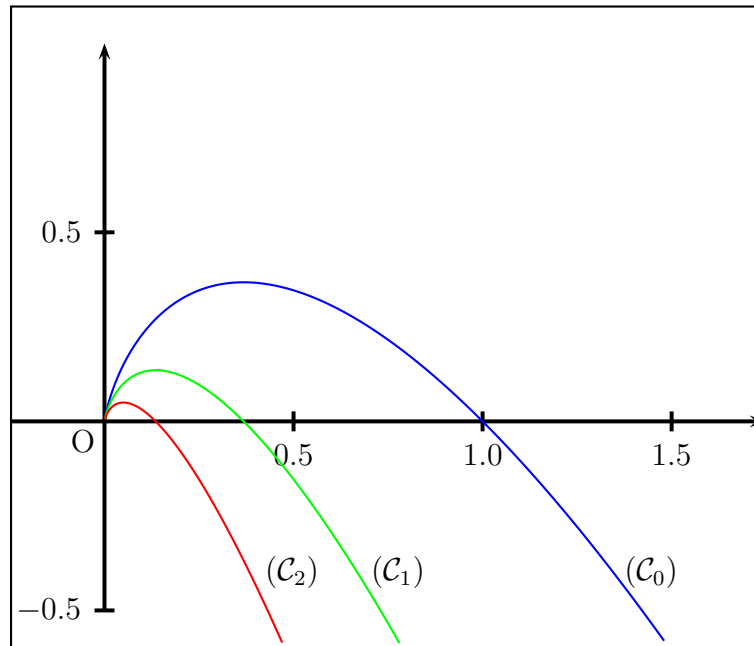
Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} -nx - x \ln x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n , dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Les courbes $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentatives des fonctions f_0 , f_1 et f_2 sont données en annexe.

1. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0 ; +\infty[$.
4. Démontrer que pour $x \in]0 ; +\infty[$, $f'_n(x) = -n - 1 - \ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n .
5. (a) Démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
(b) Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.
(c) Placer sur la figure en annexe les points A_0 , A_1 , A_2 .

ANNEXE


Exercice 2.3- 10

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}^*$.
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = xe^x - e^x + 1$$

- (a) Etudier le signe de la fonction g
- (b) En déduire le tableau de variation de f .
4. Etudier les branches infinies de la représentation graphique de f .
5. Tracer la représentation graphique de f .

Exercice 2.3- 11

1. (a) Etudier sur l'intervalle $]0; +\infty[$ le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = x - \ln x$
- (b) Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$ on a : $h(x) > 0$.
2. On définit alors sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
- (a) Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

- (b) Montrer que f est continue.
- (c) Etudier la dérivabilité de f en 0.
- (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

Exercice 2.3- 12

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x \cdot \ln(1+x)$. On considère la suite u définie par $u_0 \in [0, +\infty[$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$ et calculer pour tout x de $[0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Etudier les variations de f' , puis celles de f .
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x appartenant à $[0, +\infty[$.
4. On suppose dans cette question 3 : $u_0 \in]e-1, +\infty[$
 - (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $e-1 < u_n < u_{n+1}$.
 - (b) En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. On suppose dans cette question : $u_0 \in]0, e-1[$. Etudier la convergence de u .

Exercice 2.3- 13

Le but de cet exercice est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E).

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$

x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- (a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.
 - (b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h . Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.
 - (c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{e}\right[$. Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1 ; e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e ; +\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$. Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

Exercice 2.3- 14

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^{-x}.$$

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 10 cm). **Partie A**

- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
 - Construire Γ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- Montrer que, pour tout réel m de $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
 - Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
 - Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 &= \alpha \\ u_{n+1} &= u_n e^{-u_n}, \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

où α est le réel défini à la question **A. 2. b.**

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
 - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
- On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.
 - Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.
 - On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.
 - On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0 ($v_0 > 0$) et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$.
Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$? Si oui, préciser laquelle.

Exercice 2.3- 15 E EMLyon 2000

On considère la fonction $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[\end{cases}.$$

- Montrer que f est continue sur $]-1; +\infty[$.
 - Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Pour tout réel x de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
- Montrer : $\forall x \in]-1; +\infty[, \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$. En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$, l'intégrale $\int_x^{2x} f(t) dt$ existe.
4. On considère la fonction $F : \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

- (a) Montrer que F est dérivable sur $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ et que F est croissante.
- (b) Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) \geq x f(2x)$.
- (c) En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- (d) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t) dt$ est convergente. En déduire que la fonction F admet une limite finie de $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

