Devoir Surveillé 05

Concours blanc de Janvier 2025

Durée 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Le but de cet exercice est de calculer deux manières différentes :

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$$

1. Démontrer que
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![1, n]\!]$
$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
3. En déduire un calcul de
$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$$

Exercice 2
1. Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. Vérifier que
$$x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y$$
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n\, v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$$
Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers la même limite.

Exercice 3

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que les suites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{n^2})_n$ convergent.

Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 4

1. Pour $T > 0$, on note $\mathcal{C}_{T-\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que, pour les lois habituelles, $\mathcal{C}_{T-\text{per}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
2. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \cos(\sqrt{2}x)$.
   (a) Montrer que $f + g$ atteint un maximum global en 0.
   (b) En déduire que $f + g$ n'est pas périodique.

Exercice 5

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - 3x^2} - 1}{x^2 + x^4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. Etudier si la fonction f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$.

Exercice 6

Soit, pour $x \in I = \left]0, \pi\right[$, les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : \quad y' \sin(x) - y \cos(x) = \sin^2(x)\, e^x$$
$$(E_2) : \quad y'' + y = \big(\sin(x) + 2\cos(x)\big)\, e^x$$

1. Sans intégrer les équations, montrer que l'ensemble des solutions de (E_1) est inclus dans l'ensemble des solutions de (E_2).
2. Justifier le changement de fonction inconnue $\quad z = \dfrac{y}{e^x}$.
3. Quelle est l'équation (E_3) obtenue quand on applique ce changement à (E_2) ?
4. Intégrer (E_3).
5. En déduire les solutions réelles de (E_2), puis
6. Conclure quant aux solutions réelles de (E_1).

Exercice 7

1. Calculer $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. En déduire la représentation graphique de la fonction définie par

$$f(x) = \text{Arccos}(8\,x^4 - 8\,x^2 + 1)$$

   On soignera particulièrement l'ensemble de définition et la justification de la parité de la fonction.

Exercice 8
Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.

On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

▶ La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
▶ La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
▶ La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
▶ La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.
   Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t)\,dt$.
On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi'_x(u) = \varphi(u)$.

6. Dans cette question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par $\varphi(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.
   (a) Montrer que pour x et y réels, $\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.
   (b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.
   (c) Que vaut ℓ ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

7. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.
8. (a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
   On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
   (c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
   (d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.
   Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III

9. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)$
   (on pourra admettre les résultats de la question **-8-**).
10. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
11. (a) On suppose dans cette question **-a-**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et, pour x réel, montrer que : $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.
    (b) On suppose dans cette question **-b-**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
    Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.
12. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
    (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.
    (b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?
13. Étudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
14. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.
    (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x,y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y,-x) \in \Gamma$.
    (b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

15. Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.
16. Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).