Devoir Surveillé 06 - Eléments de Correction

Exercice 1

φ continue positive (sauf en un nombre fini de points), $\lim_\infty \varphi = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$(E_x) : \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$ a pour solution $y = f(x)$.

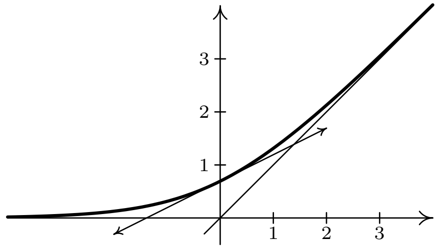
Partie I

$\varphi(x) = e^x$ vérifie les conditions avec $\ell = +\infty$.

1. L'équation (E_x) devient $\int_x^y e^t\,dt = 1 \Leftrightarrow \left[e^t\right]_x^y = 1 \Leftrightarrow e^y - e^x = 1 \Leftrightarrow e^y = 1 + e^x$.
   Comme $1 + e^x > 0$, (E_x) admet une solution unique y où $\boxed{y = f(x) = \ln(1 + e^x)}$
2. f est définie, continue dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$.
   Les limites aux bornes sont immédiates.
   On obtient le tableau des variations ci-dessous

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Étudions rapidement la différence $y - x$:
   $$f(x) - x = \ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln(e^x) = \ln\big(\frac{1}{e^x} + 1\big)$$
   qui montre que $\lim_{x\to+\infty}(y - x) = 0$ et $f('x) - x > 0$.
   $\boxed{\text{La droite d'équation } y = x \text{ est asymptote, la courbe est au dessus}}$
4. Au voisinage de 0, nous avons :
   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow 1 + e^x = 2\big(1 + \underbrace{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)}_{=u\to 0}\big)$$
   d'où $f(x) = \ln(2) + \ln(1 + u) = \ln(2) + u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$
   ce qui donne $\boxed{f(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$
   d'où la tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$ et la position locale
   $\boxed{\text{tangente d'équation } y = \ln(2) + \frac{x}{2}\,,\ \mathcal{C} \text{ localement au dessus}}$
5. Ci-dessous, la représentation où figurent les différents résultats obtenus



Partie II

$\Phi_x(u) = \int_x^u \varphi(t)\,dt$

6. Dans cette question, $\varphi(t) = \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$.
   (a) Pour tous réels x et y, nous avons
   $$\int_x^y \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}(\operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x)$$
   Comme $\operatorname{Arctan} y < \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan} x > -\frac{\pi}{2}$, nous avons $\boxed{\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1}$
   (b) Ainsi, $\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$ est impossible : $\boxed{\text{l'équation } (E_x) \text{ n'a pas de solution}}$
   (c) La limite en $+\infty$ de $\frac{1}{\pi\,(1+t^2)}$ est immédiate : $\boxed{\ell = 0}$
   Désormais : $\ell \neq 0$.
7. Il est immédiat que l'équation (E_x) s'écrit $\boxed{(E_x) : \quad \Phi_x(y) = 1}$
8. (a) φ étant continue, Φ_x est la primitive de φ qui s'annule en x. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
   Sa dérivée est φ qui est positive (ou nulle en un nombre fini de points) donc Φ_x est strictement croissante. $\boxed{\Phi_x \text{ est continue strictement croissante}}$
   Nous pouvons en déduire que $\boxed{\text{l'équation } (E_x) \text{ admet au plus une solution.}}$
   (b) φ étant strictement positive, $\ell = \lim_{+\infty}\varphi$ vérifie soit $\ell = +\infty$, soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.
   - Cas $\ell = +\infty$ Considérons un réel $A > 0$. $\lim_{+\infty}\varphi = +\infty$ montre
     $$\exists\, t_0 \in \mathbb{R}\,,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ t \geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t) \geqslant A$$
   - Cas $\ell \in \mathbb{R}_+$ donc $\ell > 0$ (puisque $\ell \neq 0$). Avec $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$, $\lim_{+\infty}\varphi = l$ montre

$$\exists\, t_0\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\in\mathbb{R}\,,\ t\geqslant t_0 \Rightarrow \ell-\frac{\ell}{2}pp\varphi(t)\leqslant \ell+\frac{\ell}{2} \Rightarrow \underbrace{A=\frac{\ell}{2}}_{A>0}\leqslant\varphi(t)$$

Dans les deux cas : $\boxed{\exists\, A>0\,,\ \exists\, t_0\in\mathbb{R}\,,\ t\geqslant t_0 \Rightarrow \varphi(t)\geqslant A}$

(c) Avec les notations précédentes, pour $u>t_0$ nous avons

$$\Phi_x(u)=\underbrace{\int_x^{t_0}\varphi(t)\,dt}_{=K\text{ constante}}+\int_{t_0}^{u}\varphi(t)\,dt\geqslant K+(u-t_0)\,A$$

Ceci prouve que $\lim_{+\infty}\Phi_x=+\infty$ donc $\boxed{\exists\, u\in\mathbb{R}\,,\ \Phi_x(u)>1}$

(d) Φ_x est continue sur $[x,u]$ vérifie $\underbrace{\Phi_x(x)}_{=0}<1<\Phi_x(u)$. Le théorème des valeurs intermédiaires prouve l'existence d'un réel t vérifiant $\Phi_x(t)=1$. L'équation (E_x) admet une solution, unique d'après **8-a-**. $\boxed{(E_x)\text{ admet une solution unique}}$

Partie III

9. Rappelons que φ est continue, donc $\Phi_0 : y\mapsto\int_0^y\varphi$ est une primitive de φ.
$f(x)$ est la solution de (E_x) se traduit par $f(x)>0$ et

$$\int_x^{f(x)}\varphi(t)\,dt=1 \Leftrightarrow \big[\Phi_0\big]_x^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \Phi_0\big(f(x)\big)=\Phi_0(x)+1$$

Continue strictement croissante, Φ_0 induit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\underbrace{]\lim_{-\infty}\varphi,\lim_{+\infty}\Phi_0[}_{=]\alpha,+\infty[}$.

En notant Φ_0^{-1} l'application réciproque, l'égalité précédente est équivalente à $\boxed{f(x)=\Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)}$

Note : on pouvait aussi composer l'égalité par Φ_0^{-1} en s'assurant que $\Phi_0(x)\in]\alpha,+\infty[\Rightarrow\Phi_0(x)+1\in]\alpha,+\infty[$.

10. La fonction Φ_0 étant continue strictement croissante, il en est de même pour $x\mapsto\Phi_0(x)+1$ et sa réciproque $(\Phi_0)^{-1}$.
Composée de deux telles fonctions $\boxed{f\text{ est continue strictement croissante}}$

11. (a) La bijection continue Φ_0 est dérivable, et sa dérivée φ ne s'annule pas (hypothèse de cette question **-a-**). L'application réciproque est donc dérivable et vérifie $\left(\Phi_0^{-1}\right)'=\frac{1}{\varphi\circ\Phi_0^{-1}}$. Ainsi, composée de fonctions dérivables, f est dérivable avec

$$f'(x)=\left(\Phi_0^{-1}\right)'\big(\Phi_0(x)+1\big)\cdot\Phi_0{}'(x)=\frac{\Phi_0{}'(x)}{\varphi\Big(\Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)\Big)}:\quad\boxed{f'(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}}$$

(b) Dans cette question, $\varphi(x_0)\neq0$ strictement positive sur $V\in\mathcal{V}\big(f(x_0)\big)$ sauf en $f(x_0)$ où $\varphi\big(f(x_0)\big)=0$.

▶ Le raisonnement du **-a-** s'applique en tout point x tel que $\varphi\big(f(x)\big)\neq0$, donc f est dérivable sur $V-\{x_0\}$, avec $f'(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.

▶ f et φ sont continues sur $\mathbb{R}$, donc

$$\lim_{x_0}\varphi=\varphi(x_0)\neq0 \quad\text{et}\quad \lim_{x_0}\varphi\circ f=\varphi\circ f(x_0)=0$$

ce qui montre que $\lim_{x_0}f'=\pm\infty$

▶ En résumé :

$$\left.\begin{array}{l} f\text{ continue sur }V\\ f\text{ dérivable sur }V-\{x_0\}\\ f'\text{ a une limite infinie en }x_0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} f\text{ non dérivable en }x_0\\ \text{tangente verticale en }x_0\text{ pour }\mathcal{C}\end{array}\right.}$$

12. Dans cette question $\ell=+\infty$ et ε est un réel strictement positif.

(a) Puisque $\lim_{+\infty}\varphi=+\infty$, nous avons $\boxed{\exists\, a\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\,,\ t\geqslant a\Rightarrow\varphi(t)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}}$

(b) Pour $x\geqslant a$ nous avons :

▶ $\varphi\geqslant0$ et $\int_x^{f(x)}\varphi=1>0$ entraînent $x<f(x)$

▶ Sur $[x,f(x)]\subset[a,+\infty[$, $\varphi(t)\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$ donc $1=\int_x^{f(x)}\varphi(t)\,dt\geqslant\int_x^{f(x)}\frac{1}{\varepsilon}\,dt=\frac{f(x)-x}{\varepsilon}\Rightarrow f(x)-x\leqslant\varepsilon$ Comme $f(x)-x\geqslant0$, nous avons finalement $\boxed{x\geqslant a\Rightarrow\left|f(x)-x\right|\leqslant\varepsilon}$

Ceci prouve que $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=0$
donc que $\boxed{\text{la droite d'équation } y=x \text{ est asymptote à } \mathcal{C} \text{ en } +\infty}$

13. Dans cette question $\ell\in\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\varepsilon>0$:

▶ Comme $\lim_{+\infty}\varphi=\ell$, nous avons $\exists\, a\in\mathbb{R}\,,\ \forall\, t\,,\ a\leqslant t\Rightarrow\ell-\varepsilon\leqslant\varphi(t)\leqslant\ell+\varepsilon$

▶ Pour la même raison qu'au **12-b-** : $x<f(x)$

► Ainsi, pour $x \geqslant a$: $\int_x^{f(x)} (\ell-\varepsilon)\,dt \leqslant \int_x^{f(x)} \varphi(t)\,dt \leqslant \int_x^{f(x)} (\ell+\varepsilon)\,dt$
soit $(\ell-\varepsilon)\big(f(x)-x\big) \leqslant 1 \leqslant (\ell-\varepsilon)\big(f(x)-x\big)$ d'où (puisque $f(x)-x>0$)
$\ell-\varepsilon \leqslant \frac{1}{f(x)-x} \leqslant \ell+\varepsilon$ c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x} = \ell$

Finalement : $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-x\big) = \frac{1}{\ell}$ $\boxed{\text{La droite d'équation } y = x + \frac{1}{\ell} \text{ est asymptote}}$

14. Dans cette question φ est paire, Γ est le graphe de f.
    (a) Le changement de variable $u=-t$ (de classe $\mathcal{C}^1$) montre que
$$\int_x^y \varphi(t)\,dt = \int_{-x}^{-y} \underbrace{\varphi(-t)}_{=\varphi(t)}\,(-dt) = \int_{-y}^{-x} \varphi(t)\,dt$$
    Ainsi : $\int_x^y \varphi(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-y}^{-x} \varphi(t)\,dt = 1$ donc $\boxed{(x,y)\in\Gamma \Leftrightarrow (-y,-x)\in\Gamma}$
    (b) Ainsi $\boxed{\Gamma \text{ admet la droite d'équation } y=-x \text{ pour axe de symétrie}}$

Partie IV

Dans cette partie $\varphi(x) = x^4 - 2\,x^2 + 1 = (x^2-1)^2$

15. Il est clair que la fonction φ est continue (polynôme), strictement positive sauf en deux points ($x=\pm1$), paire, et que $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$.
16. Nous savons donc que :
    - ► f est strictement croissante,
    - ► Γ admet la droite d'équation $y=x$ pour asymptote,
    - ► et la droite d'équation $y=-x$ comme axe de symétrie.

D'autre part, on a une tangente horizontale en x_0 si $\varphi(x_0)=0$ et $\varphi(f(x_0)\neq 0$,

► donc ici pour $x=-1$, puisque

⋆ $\varphi(1)=0$

⋆ $\varphi\big(f(1)\big)\neq 0$ puisque $f(1)\neq -1$ (on vérifie facilement que $\int_1^{-1}\varphi \neq \pm 1$)

$f(1)\neq 1$ (puisque $\int_1^1 \varphi = 0 \neq 1$)

► Même raisonnement en $x=-1$ On obtient les tangentes verticales par symétrie.

D'où la représentation donnée ci-contre