

## Devoir Surveillé 04 - Eléments de Correction

**Exercice 1**

1. Calcul de
- $A^2$
- et
- $A^3$
- :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A^3}$$

$$\text{donc } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = O$$

pour  $n \geq 3$ ,  $(n-3) \geq 0$  donc  $A^n = A^{n-3} \times A^3 = A^{n-3} \times O = O$  pour  $n > 2$ ,  $A^n = O$ .

2.

$$\begin{aligned} M(x)M(y) &= \left[ I + xA + \frac{x^2}{2}A^2 \right] \left[ I + yA + \frac{y^2}{2}A^2 \right] \\ &= I^2 + yIA + \frac{y^2}{2}IA^2 + xAI + xyA^2 + x\frac{y^2}{2}A^3 + \frac{x^2}{2}IA^2 + \frac{x^2}{2}yA^3 + \frac{x^2}{2}\frac{y^2}{2}A^4 \\ &= I + (x+y)A + \left( \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} \right) A^2 \quad (\text{les autres termes s'en vont puisque } A^3 = A^4 = O) \\ &= I + (x+y)A + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}A^2 = I + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \end{aligned}$$

on a bien :  $M(x)M(y) = M(x+y)$

3. On montre par récurrence que
- $(M(x))^n = M(nx)$
- :

vrai au rang 0 ;

si vrai au rang  $n$ , alors

$$[M(x)]^{n+1} = [M(x)]^n M(x) = M(nx)M(x) = M(nx+x) = M((n+1)x)$$

donc ppte héréditaire, donc on a bien :  $\forall n \in \mathbb{N}, (M(x))^n = M(nx)$

$$M(0) = I + 0A + 0A^2 = IM(0) = I$$

$$4. M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5. (M(x))^n = M(nx) = \begin{pmatrix} 1 & nx & (nx)^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & nx & n^2x^2/2 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 6.
- $M(x)$
- est triangulaire et aucun élément de la diagonale n'est nul, donc
- $M(x)$
- est inversible.

On a vu que  $M(x)M(y) = M(x+y)$  et que  $M(0) = I$  ; pour  $y = -x$ , on obtient :  $M(x)M(-x) = M(x-x) = M(0) = I$  ; donc  $M(x)$  est inversible et  $[M(x)]^{-1} = M(-x)$

$$\text{Et donc : } [M(x)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & (-x)^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2/2 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. B \text{ est la matrice } M(4) \text{ donc } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B^n = \begin{pmatrix} 1 & 4n & 8n^2 \\ 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Méthode du pivot :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 8L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array} \quad \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{On retrouve bien } B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. On obtient une structure de groupe pour la multiplication.

**Exercice 2****Partie A**

On considère l'équation différentielle (E) :  $y'' + 2y' + 2y = 0$  avec  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = -1$

C'est une équation homogène dont l'équation caractéristique est :  $r^2 + 2r + 2 = 0$

Les solutions sont  $r_1 = -1 - i$  et  $r_2 = -1 + i$

Alors les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme  $y(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$  où  $A$  et  $B$  sont deux réels.

On détermine  $A$  et  $B$  grace aux conditions données.

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = e^{-t}(-A \cos t - B \sin t - A \sin t + B \cos t)$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -A + B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

Conclusion : la fonction  $f$  solution de  $(E)$  est définie par  $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = e^{-t} \cos t}$

## Partie B

On se propose dans cette partie d  tudier la fonction définie pour tout nombre réel  $t$  par :

$$f(t) = e^{-t} \cos(t)$$

et de donner une allure de sa courbe représentative.

- On utilise la formule d'addition sur  $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$ .
- $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  en tant que produit de fonctions usuelles dérivables sur  $I$ .

$\forall t \in I, f'(t) = e^{-t}(-\cos t - \sin t)$  du signe de  $-\cos t - \sin t$  car  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0$   
 $-\cos t - \sin t = -(\cos t + \sin t) = -\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

- Si  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right], t - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq 0$
- Si  $t \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right], t - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow f'(t) \leq 0$
- Si  $t \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right], t - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq 0$

D'où le tableau de variations :

| $t$     | $-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{4}$                               | $\frac{3\pi}{4}$                                  | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---------|------------------|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------|
| $f'(t)$ | +                | 0                                              | -                                                 | +                |
| $f(t)$  | 0                | $\nearrow \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ | $\searrow -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$ | $\nearrow 0$     |

$$3. f(t) = \left(1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right) = \boxed{1 - t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)}$$

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 apour équation :  $\boxed{y = 1 - t}$

$\frac{t^3}{3} \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$  donc ma courbe est au-dessus de la tangente au voisinage de  $0^+$  et en-dessous au voisinage de  $0^-$ .

$$4. \text{ Soit } k \in \mathbb{Z}, \text{ et } t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

$f(t + 2k\pi) = e^{-t-2k\pi} \cos t = f(t)e^{-2k\pi}$  : les ordonnées sont multipliées par  $e^{-2k\pi} > 0$  alors

les variations de  $f$  sur  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$  sont identiques à celles trouvées sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  ; les extrema sont multipliés par  $e^{-2k\pi}$ .

- Soient  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(t) = e^{-t}$  et  $v(t) = -e^{-t}$ .

$(C_1)$  et  $(C_2)$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit encore  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$$M(t, y) \in (C) \cap (C_1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-t} \\ y = e^{-t} \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{-t} \\ \cos t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2k\pi \\ y = e^{-2k\pi} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Les points d'intersections de  $(C)$  et  $(C_1)$  sont les points  $\boxed{A_k(2k\pi; e^{-2k\pi}), k \in \mathbb{Z}}$

$$M(t, y) \in (C) \cap (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -e^{-t} \\ y = e^{-t} \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -e^{-t} \\ \cos t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi + 2k\pi \\ y = -e^{-\pi-2k\pi} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Les points d'intersections de  $(C)$  et  $(C_2)$  sont les points  $\boxed{B_k(\pi + 2k\pi; e^{-\pi-2k\pi}), k \in \mathbb{Z}}$

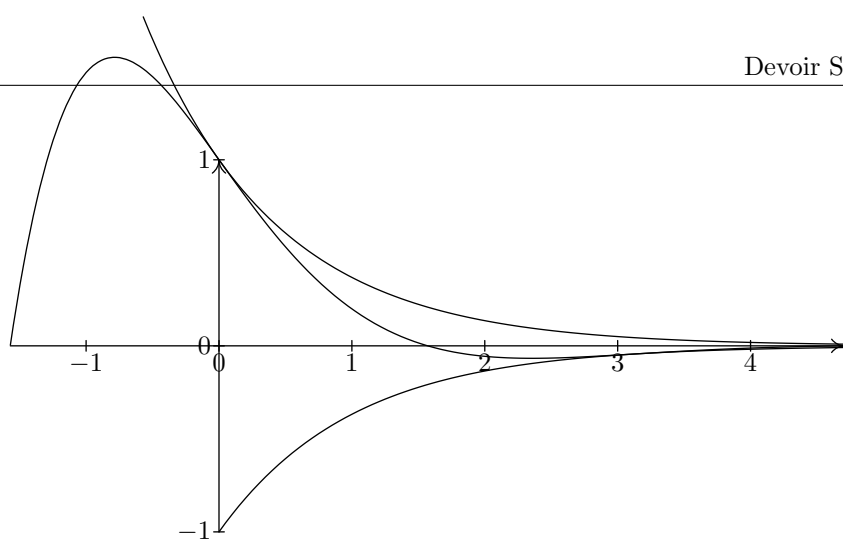
Soit  $u_k = -2k\pi$  et  $v_k = -\pi - 2k\pi$ .  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = -\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k$ .

$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(u_k) = +\infty$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(v_k) = -\infty$  alors par unicité de la limite il y a contradiction donc  $f$  n'a pas de limite en  $-\infty$

- La pente de la tangente à  $(C)$  en  $A_k$  est  $-e^{-2k\pi}$  et la pente de la tangente à  $(C_1)$  en  $A_k$  est  $-e^{-2k\pi}$  alors les tangentes à  $(C)$  et  $(C_1)$  sont confondues aux points  $A_k$ .

La pente de la tangente à  $(C)$  en  $B_k$  est  $e^{-\pi-2k\pi}$  et la pente de la tangente à  $(C_2)$  en  $A_k$  est  $e^{-\pi-2k\pi}$  alors les tangentes à  $(C)$  et  $(C_2)$  sont confondues aux points  $B_k$ .

- $\forall t > 0, u(t) \leq f(t) \leq v(t)$ . De plus  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$  alors d'après le théorème des gendarmes  $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0}$



8.

9. Pour tout entier naturel  $k$ , on pose :

$$a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} e^{-t} \cos(t) dt$$

$f$  est solution de l'équation différentielle  $(E)$  alors si on appelle  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  (cette primitive existe car  $f$  est continue) il vient par intégration de cette équation différentielle et en prenant 0 pour primitive de 0 (car on cherche une primitive de  $f$ ) :

$$f' + 2f + 2F = 0 \Rightarrow F = -\frac{f'}{2} - f \text{ ainsi}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \left[ -\frac{1}{2} e^{-t} (-\cos t - \sin t) - e^{-t} \cos t \right]_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-(k+1)\pi} \sin \left( -\frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right) - \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} \sin \left( -\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} (e^{-\pi}(-1)^k - (-1)^{k-1}) \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} (-1)^k (e^{-\pi} + 1) \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} (-1)^k e^{\frac{-\pi}{2}} \left( e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}-k\pi} (-1)^k e^{\frac{\pi}{2}} 2 \left( e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}, a_k = e^{-k\pi} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} = e^{-k\pi} (-1)^k \left( e^{\frac{-\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

10.  $\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (-e^{-\pi})^k$  donc  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison

$$q = -e^{-\pi} \text{ et de premier terme } a_0 = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2}.$$

11. On pose :  $\forall k \in \mathbb{N}, b_k = |a_k| = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} (e^{-\pi})^k$ 

$$S_n = \sum_{k=0}^n b_k = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

$$0 \leq e^{-\pi} \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi}} = \operatorname{ch} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{\pi}{2}} (e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}})}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\tanh \frac{\pi}{2}}$$

C'est la somme des aires des portions de plan entre la courbe et l'axe des abscisses pour  $x > 0$ .

### Exercice 3

Pour toutes suites numériques  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on définit la suite  $u * v = w$  par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

## Partie I : Exemples

### Partie A

#### 1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $w_n$  en fonction de  $n$  dans chacun des cas suivants :

(a) On a alors  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n 2 \cdot 3 = 6(n+1)$ (b)  $u_n = 2^n$  et  $v_n = 3^n$ . On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^n (2/3)^k = 3^n \frac{(\frac{2}{3})^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

(c)  $u_n = \frac{2^n}{n!}$  et  $v_n = \frac{3^n}{n!}$ . On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} C_n^k 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!} (2+3)^n = \frac{5^n}{n!}$$

#### 2. Programmation

Dans cette question, les suites  $u$  et  $v$  sont définies par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \ln(n+1)$  et  $v_n = \frac{1}{n+1}$ .

On a besoin d'un S accumulateur pour les sommes. D'un compteur n pour les w et d'un compteur k pour la somme. Et d'une variable pour NF pour la valeur finale.

On a  $v_{n-k} = 1/(n-k+1)$

Var k,n,NF:integer; S:real;

begin

writeln('n final?');readln(NF);

for n:=0 to NF do

begin

S:=0;

for k:=0 to n do S:=S+ln(k+1)/(n-k+1);

writeln(n, ' : ', S);

end;

end.

### 3. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m u_k &= \sum_{k=n+1}^m (1/2)^k = (1/2)^{n+1} \sum_{k=n+1}^m (1/2)^{k-n-1} \text{ r  index   } h = k - n - 1 \\ &= (1/2)^{n+1} \sum_{h=0}^{m-n-1} (1/2)^h = (1/2)^{n+1} \frac{(1/2)^{m-n} - 1}{(1/2) - 1} \\ &= (1/2)^n \left(1 - (1/2)^{m-n}\right) = (1/2)^n - (1/2)^m \\ &\leq (1/2)^n = u_n \end{aligned}$$

Donc pour  $n < m$ , on a bien :  $\sum_{k=n+1}^m u_k \leq u_n$ .

(b) Inégalités improuvables en un temps fini !

On sépare les termes de la somme  $w_{2n}$  :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = u_{2n} v_0 + \sum_{k=0}^n u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k}$$

Pour  $k \leq n$  on a  $2n - k \geq n$  et  $v_{2n-k} \leq v_n$  (suite v décroissante)

Pour  $k \leq 2n - 1$  on a  $v_{2n-k} \leq v_1$  donc en multipliant par  $u_k \geq 0$

$$w_{2n} \leq u_{2n} v_0 + \sum_{k=0}^n u_k v_n + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_1$$

Et comme  $\sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^k = 2$  et que  $\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq u_n$  on a finalement en multipliant par  $v_1 \geq 0$  et par  $v_n \geq 0$  :

$$w_{2n} \leq u_{2n} v_0 + 2 v_n + u_n v_1$$

et de même pour

$$\begin{aligned} w_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k} = u_{2n+1} v_0 + \sum_{k=0}^n u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n-k} \\ &\leq u_{2n+1} v_0 + \sum_{k=0}^n u_k v_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_1 \\ &\leq v_0 u_{2n+1} + 2 v_{n+1} + v_1 u_n \end{aligned}$$

(c) Comme  $w_{2n}$  est positive (somme de termes positifs) et majorée par  $u_{2n} v_0 + 2 v_n + u_n v_1$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , alors par encadrement  $w_{2n}$  tend vers 0.

De même pour  $w_{2n+1}$

Donc la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini (termes pairs et impairs)

(d) Soit  $w'_n = \sum_{k=0}^n u'_k v_{n-k}$ . On a  $|w'_n| \leq \sum_{k=0}^n |u'_k v_{n-k}| = w_n$ . Donc par encadrement,  $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (i.e.  $u' * v$ ) tend vers 0.

## Partie B

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Si une suite a est décroissante alors pour tout entier  $n > 0$  :  $a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$  donc  $a_{n+1} \leq a_{n-1}$  et en additionnant ces deux inégalités on a  $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1}$  ou encore,  $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ .

Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.

Si une suite a est strictement croissante alors  $a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$  et  $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$  et on n'a donc pas  $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$  pour tout entier  $n > 0$ . Donc une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

2. Soit  $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle v erifiant :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$ .

(a) Une telle suite est r ecurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Son équation caractéristique est :  $2r^2 - r - 1 = 0$  qui a pour racines 1 et  $-1/2$

Donc il existe deux constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) On utilise la r eciproque de la propriété ci-dessus :

Soit la suite définie par  $z_n = 1 + (-1/2)^n$ . Elle est solution de  $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$  et est positive ( $(-1/2)^n \geq -1$  pour tout entier  $n$ )

Donc elle est élément de  $A$ . Mais elle n'est pas monotone :

$$z_0 = 2 > z_1 = 1/2 < z_2 = 3/4$$

Donc il existe des (au moins une) suites appartenant à  $A$  et non monotones.

3. Soit  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $A$  et  $b$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ . (c'est la suite  $u'$  du 3.)

On définit alors la suite  $c$  par :  $c_0 = a_0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$ .

(a) Pour tout  $n \geq 1$  on a :  $c_n - c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} - (a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n) = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) - a_{n+1} \geq 0$  car  $a \in A$

Donc  $c_{n+1} \leq c_n$  et la suite  $c$  est décroissante.

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$  alors  $c_n \geq 0$  et la suite  $c$  est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers un réel  $\ell \geq 0$

(b) La démonstration de  $\sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$  ne se prête pas à la récurrence car  $n$  apparaît aussi à l'intérieur de la somme, et l'on n'a pas de relation simple entre  $c_{n+1-k}$  et  $c_{n-k}$

On a deux expressions pour  $c_{n-k} = a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}$  si  $k \leq n-1$  et  $c_{n-n} = a_0$

Il faudra donc découper la somme. Et pour celà, que  $n \geq 1$

$$\text{Pour } n = 0 : \sum_{k=0}^0 \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k} = c_0 = a_0$$

Et pour tout entier naturel  $n > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\right) + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}a_{n-k-1} + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1} + a_0 \quad \text{r index } \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{h=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^h a_{n-h} + a_0 \\ &= a_n - a_0 + a_0 = a_n \end{aligned}$$

On a donc  $b * c = a$

**N.B.** On ne peut pas utiliser ici le résultat du 3.c) pour dire que  $a$  converge alors vers 0 car on ne sait pas que la suite  $c$  converge vers 0.

(c) Soit  $\varepsilon$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = c_n - \ell$  et  $d$  la suite  $b * \varepsilon$ .

La suite  $\varepsilon$  est décroissante (car  $\ell$  est une constante par rapport à  $n$ ) et tend vers 0 ; et  $b = u'$

Donc  $d = b * \varepsilon$  converge vers 0.

(d) On a

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - \ell) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \ell \\ &= a_n - \ell \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$a_n = d_n + \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \rightarrow \frac{2}{3}\ell$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  car  $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$

**Exercice 4**

1. Si  $\sin(t) = 0$  alors  $\cos(t) = \pm 1$  et  $f_t(z)$  est définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Sinon  $f_t(z)$  est définie sauf pour  $z = \frac{-\cos(t)}{\sin(t)}$  qui est réel. Donc  $f_t$  est définie sur  $\mathbb{C}'$ .

2.  $f_t(z) = z \Leftrightarrow z \cos(t) - \sin(t) = z(z \sin(t) + \cos(t))$ , soit  $\sin(t)(z^2 + 1) = 0$ .

Donc tout point est invariant quand  $t \equiv 0 \pmod{\pi}$ ; alors  $f_t$  est l'identité.

Sinon seuls les points d'affixes  $i$  et  $-i$  sont invariants par  $f_t$ .

3. Comme  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  et  $\sin(t + \pi) = -\sin t$ , on a  $f_{t+\pi}(z) = f_t(z)$  pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}'$ .

Donc les applications  $f_t$  et  $f_{t+\pi}$  sont égales.

4. En simplifiant, on trouve  $\frac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i} = \frac{e^{-it}(z - i)}{e^{it}(z + i)}$  soit  $\frac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i} = e^{-2it} \frac{z - i}{z + i}$

On notera que le dénominateur ne s'annule pas si  $z \in \mathbb{C}'$ .

5.  $|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow (z - i)(\bar{z} + i) < (z + i)(\bar{z} - i)$ .

Après simplification  $|z - i| < |z + i| \Leftrightarrow 2\Im(z) > 0$ .

L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z - i| < |z + i|$  est le demi-plan  $P'$ .

On a vu que précédemment que  $z \in \mathbb{C}' \Leftrightarrow \left| \frac{z - i}{z + i} \right| = \frac{|z - i|}{|z + i|} < 1$ .

Or  $\left| \frac{f_t(z) - i}{f_t(z) + i} \right| = \left| \frac{z - i}{z + i} \right|$  puisque  $|e^{-2it}| = 1$ . Donc  $z \in \mathbb{C}' \Leftrightarrow f_t(z) \in \mathbb{C}'$ .

Ceci montre que  $f_t$  définit une application de  $\mathbb{C}'$  dans  $\mathbb{C}'$ .

6. On trouve comme composée  $f_t \circ f_u = f_{t+u}$  avec les formules usuelles  $\cos(t + u)$  et  $\sin(t + u)$ .

7. La relation  $f_t \circ f_u = f_{t+u}$  montre que la composition est une loi interne dans  $F$ .

La composition des applications est connue pour être associative en général.

Ici  $f_t \circ f_u = f_{t+u}$  et  $f_u \circ f_t = f_{u+t}$  sont égales; d'où la commutativité.

L'élément neutre est  $f_0 = Id$  et la réciproque de  $f_t \in F$  est  $f_{-t}$ , encore élément de  $F$ .

Donc  $(F, \circ)$  est un groupe abélien.