Devoir Surveillé 03 - Eléments de Correction

Exercice 1
Test 103 : voir correction en classe

Exercice 2
Exercice 11 du chapitre Equations différentielles fait en classe.

Exercice 3
Exercice 2 du DM4 : voir correction DM4

Exercice 4
PARTIE I

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \;—\; \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \right\}$$

$$\mathcal{F} = \left\{ f \in \mathcal{E} \;—\; f \neq 0 \text{ et } \exists\, x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0 \right\}$$

1. La fonction "cos" est définie, continue sur $\mathbb{R}$, et
   $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos(x)\cos(y)$ est bien connu. $\boxed{\cos \in \mathcal{E}}$

2. Si $f \in \mathcal{E}$, soit $f_\alpha : x \mapsto f_\alpha(x) = f(\alpha\, x)$.
   - ⋄ f_α est définie, continue sur $\mathbb{R}$ composée de f et de $x \mapsto \alpha\, x$ continues
   - ⋄ $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x+y) + f_\alpha(x-y) = f(\alpha\, x + \alpha\, y) + f(\alpha\, x - \alpha\, y)$
     or $f \in \mathcal{E}$ donc $= 2\, f(\alpha\, x)\, f(\alpha\, y) = 2\, f_\alpha(x)\, f_\alpha(y)$

   Ceci montre bien que $\boxed{f \in \mathcal{E} \Rightarrow f_\alpha \in \mathcal{E}}$

3. (a) Avec $x = y = 0$, la propriété devient $f(0) + f(0) = 2\, f(0)^2$
   donc $f(0) = f(0)^2 \Leftrightarrow f(0)\big(f(0) - 1\big) = 0$ Conclusion $\boxed{f(0) \in \{0, 1\}}$

   (b) Si $f(0) = 0$, alors $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x+0) + f(x-0) = 2\, f(x)\, \underbrace{f(0)}_{=0} = 0$
   donc $2\, f(x) = 0$. Conclusion $\boxed{f(0) = \mathbf{0} \Rightarrow f = 0 \text{ fonction nulle}}$

   (c) Si $f(0) = 1$, alors $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(0+x) + f(0-x) = 2\, \underbrace{f(0)}_{=1}\, f(x)$
   donc $f(-x) = f(x)$ Conclusion $\boxed{f(0) = 1 \Rightarrow f \text{ est paire}}$

PARTIE II

A - $f \in \mathcal{E}$ et $f(0) = 1$ *(donc f est paire)*
Notons que la continuité de f montre son intégrabilité.

4. (a) $\forall\, r > 0$, utilisons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$: $x+y = u \quad d\,x = d\,u$
   qui donne immédiatement $\boxed{\int_0^r f(x+y)\, dx = \int_y^{y+r} f(u)\, du}$

   (b) On fixe $x \in \mathbb{R}$ et on intègre par rapport à y l'égalité $f(x+y) + f(x-y) = 2\, f(x)\, f(y)$
   $$\int_0^r f(x+y)\, dy + \int_0^r \underbrace{f(x-y)}_{=f(y-x)}\, dy = 2 \int_0^r f(x)\, f(y)\, dy$$
   $$\Leftrightarrow \int_0^r f(x+y)\, dy + \int_0^r f(-x+y)\, dy = 2 \int_0^r f(x)\, f(y)\, dy \quad f \text{ paire}$$
   $$\Leftrightarrow \int_x^{x+r} f(u)\, du + \int_{-x}^{-x+r} f(u)\, d\,u = 2\, f(x) \int_0^r f(y)\, dy \quad \text{voir (a)}$$
   f étant paire, on obtient bien $\boxed{\int_x^{x+r} f(u)\, du + \int_{x-r}^{x} f(u)\, d\,u = 2\, f(x) \int_0^r f(y)\, dy}$

5. (a) La fonction f étant continue et $f(0) = 1$, il existe un voisinage de 0 où $f(x) > \dfrac{1}{2}$.
   Un tel voisinage contient un intervalle de la forme $[0, r]$ (avec $0 < r$). ainsi
   $\exists\, r > 0, \quad \int_0^r f(y)\, d\,y \geqslant \int_0^r \frac{1}{2}\, dy = \frac{r}{2} > 0$ $\boxed{\exists\, r > 0 \quad \int_0^r f(y))\, dy > 0}$
   Notons $\boxed{c = 2 \int_0^r f(y))\, dy}$

   (b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur$\mathbb{R}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$). En utilisant **5-b)**, nous avons
   $$f(x) = \frac{\int_x^{x+r} f(u)\, d\,u + \int_{x-r}^{x} f(u)\, d\,u}{2 \int_0^r f(y)\, d\,y} = \frac{F(x+r) - F(x-r)}{c}$$
   Comme $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ nous avons $\boxed{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$

   (c) On reprend le raisonnement précédent sachant que f est de classe C^1. La primitive F est donc de classe $\mathcal{C}^2$, d'où f est également de classe $\mathcal{C}^2$.
   Le raisonnement par récurrence est immédiat : si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
   Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ soit $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty}$

   (d) En dérivant la formule établie au **6-b)** $c\, f(x) = F(x+r) - F(x-r)$, il vient $\boxed{c\,f'(x) = f(x+r) - f(x-r)}$

6. On dérive encore (f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) : $c\,f''(x) = f'(x+r) - f'(x-r)$.
   On multiplie par c et on utilise deux fois le résultat précédent :
   $c^2\,f''(x) = \underbrace{f(x+2r) - f(x)}_{=c\,f'(x+r)} - \underbrace{f(x) - f(x-2r)}_{=c\,f'(x-r)} = f(x+2r) - 2f(x) + f(x-2r)$
   Mais $f \in \mathcal{E}$ montre que $f(x+2r) + f(x-2r) = 2\,f(x)\,f(2r)$, ce qui donne finalement $c^2\,f''(x) = 2\,f(x)\,f(2r) - 2\,f(x) = \underbrace{2\,\big(f(2r)-1\big)}_{=\text{constante}}\,f(x)$ soit,

   $\boxed{f''(x) = \lambda\,f(x)}$

B - Conclusion :

7. Les solutions de l'équation différentielle linéaire (Δ) $y'' = \mu\,y$ du second ordre à coefficients constants $y = \mu\,y$ sont bien connues. L'équation caractéristiques est $t^2 - \mu = 0$
   — si $\mu > 0$ alors $t = \pm\sqrt{\mu}$ donc $y = A\,e^{\sqrt{\mu}\,x} + B\,e^{-\sqrt{\mu}\,x}$
   — si $\mu = 0$ alors $t = 0$ racine double donc $y = A\,x + B$
   — si $\mu < 0$ alors $t = \pm\,i\,\sqrt{-\mu}$ donc $y = A\,\cos\big(\sqrt{-\mu}\,x\big) + B\,\sin\big(\sqrt{-\mu}\,x\big)$
8. Si $f \in \mathcal{E}$ alors :
   — f n'est pas la fonction nulle donc $f(0) = 1$ (voir **4-b**)
   — f est solution de l'équation différentielle (Δ) : $y'' = \mu\,y$ (voir **7**)
   (ceci est une condition nécessaire, a priori non suffisante).

   $f(0) = 1$ et f paire imposent des conditions (nécessaires) sur A et B :
   — si $\mu > 0$ il vient $A + B = 1$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $(A - B)\,\underbrace{\big(e^{\sqrt{\mu}\,x} - e^{-\sqrt{\mu}\,x}\big)}_{=2\,\mathrm{sh}(\sqrt{\mu}\,x)} = 0$.

   Comme le "sh" n'est pas identiquement nul, $A = B = \dfrac{1}{2}$ soit $y = \mathrm{ch}\big(\sqrt{\mu}\,x\big)$ qui répond à la question (voir **2** et **3**) : $\underline{f : x \mapsto \mathrm{ch}\,(\alpha\,x) \quad \alpha > 0}$
   — si $\mu = 0$ il vient $A = 1$ et $B = 0$ soit $f(x) = 1$ qui convient (fonction continue, non identiquement nulle et qui vérifie $1 + 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1$) $\underline{f :\ x \mapsto 1}$
   Note : c'est la solution précédente avec $\alpha = 0$
   — si $\mu < 0$ il vient $A = 1$ et $B = 0$, donc $f(x) = \cos\big(\sqrt{-\mu}\,x\big)$ qui convient (voir la question **1**) $\underline{f :\ x \mapsto \cos\,(\alpha\,x) \quad \alpha > 0}$

   En remarquant que la fonction nulle (qui convient) est la solution précédente avec $\alpha = 0$ et que les fonctions cos et ch sont paires, on peut omettre les conditions sur α.

Conclusion $\boxed{\mathcal{E} = \big\{x \mapsto \cos(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{x \mapsto \mathrm{ch}(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\big\}}$

9. $\mathcal{F}$ est composé des fonctions $f \in \mathcal{E}$, non identiquement nulles et qui s'annulent au moins une fois sur $\mathbb{R}$. Il est clair que $\boxed{\mathcal{E} = \big\{x \mapsto \cos(\alpha\,x) \quad \alpha \in \mathbb{R}\big\}}$

Exercice 5

$j = e^{i\,2\,\pi/3}$, $\mathcal{A} = \big\{a + b\,j \;—\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2\big\}$. Notons que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^2 = \overline{j}$

1. $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Montrons que c'est un sous-anneau de $(\mathbb{C}\,,+\,,\times)$:
   — $\mathcal{A}$ contient 1 et -1 puisque $\pm 1 = \pm 1 + 0\,j$ avec $(\pm 1, 0) \in \mathbb{Z}^2$
   — $\mathcal{A}$ est stable pour '+' puisque $\forall\ a + b\,j\,,\ a' + b'\,j \in \mathcal{A}$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{Z})$
   $$(a + b\,j) + (a' + b'\,j) = \underbrace{(a + a')}_{\in\,\mathbb{Z}} + \underbrace{(b + b')}_{\in\,\mathbb{Z}}\,j \in \mathcal{A}$$
   — $\mathcal{A}$ est stable pour '×' puisque $\forall\ a + b\,j\,,\ a' + b'\,j \in \mathcal{A}$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{Z})$
   $$(a + b\,j) \times (a' + b'\,j) = a\,a' + (a\,b' + a'\,b)\,j + b\,b'\,\underbrace{(-1 - j)}_{=\,j^2}$$
   $$= \underbrace{(a + a' - b\,b')}_{\in\,\mathbb{Z}} + \underbrace{(a\,b' + a'\,b - b\,b')}_{\in\,\mathbb{Z}}\,j \in \mathcal{A}$$
   Sous-anneau d'un corps commutatif : $\boxed{(\mathcal{A}\,,+\,,\times)\ \text{est un anneau commutatif intègre}}$

2. Nous avons $\mathcal{U}_6 = \big\{1\,,\,e^{i\,2\,\pi/6}\,,\,e^{i\,4\,\pi/6}\,,\,e^{i\,6\,\pi/6}\,,\,e^{i\,8\,\pi/6}\,,\,e^{i\,10\,\pi/6}\big\}$
   $= \big\{1\,,\,-j^2\,,\,j\,,\,-1\,,\,j^2\,,\,-j\big\}$ $\boxed{\mathcal{U}_6 \subset \mathcal{A}}$
   D'autre-part, les éléments de $\mathcal{U}_6$ sont inversibles dans $\mathcal{C}$ $(x \in \mathcal{U}_6 \Rightarrow x^6 = 1 \Rightarrow x \neq 0)$ et $\forall\ x \in \mathcal{U}_6\,,$ $\left(\frac{1}{x}\right)^6 = \frac{1}{x^6} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \in \mathcal{U}_6$
   $\boxed{\mathcal{U}_6\ \text{contient ses inverses}}$

   Note : l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathcal{U}$.
3. $u = 1 + j$ et $U = \big\{u^k \;—\; k \in \mathbb{Z}\big\}$ $(k \in \mathbb{Z}$ est possible car $1 + j \neq 0)$
   (a) Comme $1 + j = -j^2$, nous avons $u^6 = j^{12} = 1 = u^0$.
   Ainsi, pour tout entier relatif n, la division euclidienne $n = 6\,k + r$ $0 \leqslant r \leqslant 5$ montre que $u^n = (u^6)^k\,u^r = 1^k\,u^r = u^r \in \{u^0\,,\,u^1\,,\,u^2\,,\,u^3\,,\,u$
   De plus, $\big\{u^0\,,\,u^1\,,\,u^2\,,\,u^3\,,\,u^4\,,\,u^5\big\} = \mathcal{U}_6$ est constitué de 6 éléments différents.

   $\boxed{U = \mathcal{U}_6\ \text{est constitué de 6 éléments.}}$

(b) $\mathcal{U}_6$ est un sous-ensemble de $\mathcal{U}$, non vide, stable pour "$\times$", et contenant ses inverses.

$$\boxed{\mathcal{U}_6 \text{ est un groupe multiplicatif}}$$

4. $\forall\, z \in \mathcal{A}\,,\ N(z) = z\,\overline{z}\,.$

(a) Tout élément z de $\mathcal{A}$ s'écrit $z = a + b\,j$ avec $(a,b) \in \mathcal{Z}^2\,.$ Alors (voir **1**)

$$N(z) = (a+b\,j)\,(a+b\,j^2) = a^2 + \underbrace{b^2\,j^3}_{=b^2} + a\,b\,\underbrace{(j+j^2)}_{=-1} = a^2 - a\,b + b^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\forall\, z = a+b\,j \in \mathcal{A}\,,\ N(z) = a^2 - a\,b + b^2 \in \mathbb{Z} \quad (a,b) \in \mathbb{Z}}$$

(b) Soit $(u,v) \in \mathcal{A}$. u divise $v \Leftrightarrow \exists\, z \in \mathcal{A}\,,\ v = u\,z$.

Alors : $N(v) = v\,\overline{v} = u\,z\,\overline{u\,z} = u\,z\,\overline{u}\,\overline{z} = u\,\overline{u}\,z\,\overline{z} = N(u)\,N(z)$

où $N(u), N(v), N(z) \in \mathbb{N}$, d'où $\boxed{u \text{ divise } v \ \Rightarrow\ N(u) \text{ divise } N(v) \text{ dans } \mathbb{N}}$

5. H désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}$ inversibles dans $\mathcal{A}$.

(a) Pour tout élément $z \in H$ nous avons $\exists\, z' \in \mathcal{A}\,,\ z\,z' = 1$ donc z divise 1.

Le résultat précédent montre que $N(z)$ divise $N(1) = 1$ dans $\mathbb{N}$,

donc $N(z) = 1$, c'est-à-dire $\left|z\right|^2 = 1$ $\boxed{z \in H \ \Rightarrow\ \left|z\right| = 1}$

(b) Avec les notations usuelles de l'énoncé, $z = a + b\,j \in H \ \Rightarrow\ a^2 - a\,b + b^2 - 1 = 0$.

C'est une équation du second degré en a qui doit avoir une racine entière d'où :

— $\Delta = b^2 - 4\,(b^2 - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow 3\,b^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow b \in \left\{-1, 0, 1\right\}$ (b est entier)

— L'étude des trois cas donne alors :

— $b = -1$: $a^2 + a = 0 \Rightarrow a \in \left\{-1, 0\right\}$ soit $z = -1 - j = j^2$ ou $z = -j$

— $b = 0$: $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a \in \left\{-1, 1\right\}$ soit $z = -1$ ou $z = 1$

— $b = 1$: $a^2 - a = 0 \Rightarrow a \in \left\{0, 1\right\}$ soit $z = j$ ou $z = 1 + j = -j^2$

Les seules valeurs possibles pour z sont les éléments de $\mathcal{U}_6$ donc $H \subset \mathcal{U}_6$.

Comme les éléments de $\mathcal{U}_6$ sont inversibles dans $\mathcal{U}_6$, donc dans $\mathcal{A}$ (voir **2**)

nous pouvons en déduire que

$$\boxed{z \in \mathcal{A} \text{ est inversible dans } \mathcal{A} \Leftrightarrow z \in H = \mathcal{U}_6}$$

6. Recherche des diviseurs de $\omega = 1 - j$.

(a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $z = a + b\,j$. Nous avons $N(z) = 3 \Leftrightarrow a^2 - a\,b + b^2 - 3 = 0$

On reprend le raisonnement de la question précédente, ce qui donne :

— $\Delta = b^2 - 4\,(b^2 - 3) \geqslant 0 \Leftrightarrow b^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow b \in \left\{-2, -1, 0, 1, 2\right\}$ (b est entier)

— L'étude des différents cas donne alors :

— $b = -2$: $a^2 + 2\,a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ soit $z = -1 - 2\,j$

— $b = -1$: $a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \left\{-2, 1\right\}$ soit $z = -2 - j$ ou $z = 1 - j$

— $b = 0$: $a^2 - 3 = 0$ qui n'a pas de solutions entières

— $b = 1$: $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \left\{-1, 2\right\}$ soit $z = -1 + j$ ou $z = 2 + j$

— $b = 2$: $a^2 - 2\,a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ soit $z = 1 + 2\,j$

$$\boxed{N(z) = 3 \Leftrightarrow z \in \mathcal{D} = \left\{\,-2 - j\,,\ -1 - 2\,j,\ ,\ -1 + j\,,\ 1 - j\,,\ 1 + 2\,j\,,\ 2 + j\right\}}$$

(b) D'après **4-b**, z divise $\omega \Rightarrow N(z)$ divise $N(\omega) = 3 \Rightarrow N(z) = 1$ ou $N(z) = 3$.

— $N(z) = 1 \Leftrightarrow z \in \mathcal{U}_6$ (voir **5-b**).

Tous ces éléments z conviennent puisqu'ils sont inversibles dans $\mathcal{U}_6$:

$\omega = z \times \left(\dfrac{1}{z}\,\omega\right)$ où $\dfrac{1}{z}\,\omega \in \mathcal{A}$ (produit de deux éléments de $\mathcal{A}$)

— $N(z) = 3$ est étudié ci-dessus (**6-a**).

Il suffit de vérifier que ces éléments divisent θ en calculant les quotients :

$$\frac{\omega}{-2-j} = \frac{1-j}{-2+(1+j^2)} = \frac{1-j}{(-1+j)\,(1+j)} = \frac{-1}{1+j} = j \in \mathcal{A}$$

Les cinq autres quotients donnent les cinq autres éléments de $\mathcal{U}_6$ qui sont dans $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\text{Les diviseurs de } \omega \text{ sont les éléments de } \mathcal{U}_6 \cup \mathcal{D}}$$

Note : les éléments de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{U}_6$ sont associés par paires (de produit ω) :

$\omega = (-2 - j)\,(j)$ $\omega = (-1 - 2\,j)\,(1 + j)$ $\omega = (-1 + j)\,(-1)$

$\omega = (1 - j)\,(1)$ $\omega = (1 + 2\,j)\,(-1 - j)$ $\omega = (2 + j)\,(-j)$

7. Puisque $\omega \in \mathcal{A}$ qui est stable pour le produit, il lest clair que $I = \omega\,\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$.

Montrons que I est un sous-groupe de $\mathcal{A}$:

— $I \neq \varnothing$ par exemple, il contient le produit $\omega\,\omega$

— I est stable pour l'addition : la somme de deux éléments de I est de la forme

$\lambda\,\omega + \lambda'\,\omega = (\lambda + \lambda')\,\omega$ où $\lambda, \lambda' \in \mathcal{A} \Rightarrow \lambda + \lambda' \in \mathcal{A}$.

— I contient ses opposés puisque $-(\lambda\,\omega) = (-\lambda)\,\omega$ où $\lambda \in \mathcal{A} \Rightarrow -\lambda \in \mathcal{A}$

$$\boxed{I = \omega\,\mathcal{A} \text{ est un sous-groupe du groupe abélien } \mathcal{A}}$$

Montrons que $Z \cap I \subset 3\,\mathbb{Z}$: si l'entier n appartient à I, alors $\exists\, \lambda \in \mathcal{A}\,,\ n = \lambda\,\omega$ donc ω divise n. Mais alors $N(\omega)$ divise $N(n)$, c'est-à-dire que 3 divise n^2 dans $\mathbb{N}$, donc 3 divise n (puisque 3 est un nombre premier). n est bien multiple de 3.

Réciproquement, puisque $N(w) = 3$ s'écrit $\omega\,\overline{\omega} = 3$, tout élément $n = 3\,k \in 3\,\mathbb{Z}$ s'écrit $n = \omega\,\overline{\omega}\,k$ où $\overline{\omega}\,k \in \mathcal{A}$ (produit de deux éléments de $\mathcal{A}$), donc $n \in I$. $\boxed{\mathbb{Z} \cap I = 3\,\mathbb{Z}}$

8. Nous avons vu que les diviseurs de ω sont :

— les éléments r de $\mathcal{U}_6$ qui sont inversibles

— les éléments d de $\mathcal{D}$ qui sont de la forme $d = \frac{\omega}{r}$ où $r \in \mathcal{U}_6$. On en déduit que $d = \lambda\,\omega$ où $\lambda = \frac{1}{r} \in \mathcal{U}_6$ est bien inversible.

Les diviseurs de ω sont de la forme λ ou $\lambda\,\omega$, avec λinversible $\boxed{\omega \text{ est premier}}$