Devoir Surveillé 02

Le vendredi 20 Septembre 2024
14h-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1
Le but de cet exercice est de calculer deux manières différentes :

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$$

1. Démontrer que
$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$
2. **Première méthode :** Manipulation des coefficients binômiaux.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in [\![1, n]\!]$
   $$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$
   (b) En déduire un calcul de
   $$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$$
3. **Seconde méthode :** Dériver une fonction.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f : x \mapsto (1+x)^n$$
   (a) Donner une expression développée de $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire deux expressions différentes de la dérivée f' de f.
   (c) En choisissant correctement x, retrouver le résultat de :
   $$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$$

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation
$$|2+5x| = 4$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation
$$|4-x^2| > 8$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
$$\sqrt{12x-4} = 2\sqrt{x}$$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation
$$\sqrt{x+3} \geq x+1$$

Exercice 3

Les 3 parties sont indépendantes

A. Tables de vérité

Étant donné P, Q et R trois assertions, vérifier en dressant la table de vérité :

1. P ou $(Q$ et $R) \equiv (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
2. non$(P \implies Q) \equiv P$ et non(Q).

B. Quantificateurs.

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

1. $(x > 0$ et $x < 1)$ ou $x = 0$
2. $x > 3$ et $x < 5$ et $x \neq 4$
3. $(x \leq 0$ et $x > 1)$ ou $x = 4$
4. $x \geq 0 \implies x \geq 2$.

C. Ensembles

Étant donné A, B deux sous-ensembles de E, justifier les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

Exercice 4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante, minorée par 0. En déduire qu'elle converge.
   (b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Calculer I_0 puis I_1. En déduire que la limite de $(I_n)_n$ est 0.
2. Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.
   (a) Calculer w_0 et w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (c) Montrer pour tout entier naturel n, $w_n \geq 0$.
   En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $f_n : t \mapsto \cos^{n+1}(t)\sin(t)$. Calculer f_n' puis en déduire que

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n t\ \sin^2 t\ dt$$

(e) En déduire : $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

(f) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. Déterminer cette constante.

Exercice 5

Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1. (a) On rappelle que : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

   (b) Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.

   Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (c) En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

   (a) Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

   (b) En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.

3. (a) Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(\mathrm{e}^x\right)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

   (b) En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Etudier le sens de variations de la fonction F.

2. (a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$ et calculer

   $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.

(c) Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2. \\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) - f(x) + 2\ln 2. \end{array}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1+\mathrm{e}^k).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. (a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Comparer u_n et $F(n)$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1+\mathrm{e}^k).$$

1. Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. (a) Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Comparer u_n et $F(n)$.
4. La suite (u_n) est-elle convergente ?