Devoir Surveillé 02 - Eléments de Correction

Exercice 1 (5)
Partie A

1. (a) On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Posons $h = \mathrm{e}^x$, donc $f(x) = \dfrac{\ln(1+h)}{h}$.
D'après le rappel de l'énoncé :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(h) = 0$.

(b) On factorise e^x dans la parenthÃ¨se :
$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(\mathrm{e}^x\left[\mathrm{e}^{-x}+1\right]\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(\ln \mathrm{e}^x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\right)$ et en développant :
$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) Les résultats précédents montrent que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale Ã $\mathcal{C}$ au voisinage de moins l'infini et que l'axe des abscisses est asymptote horizontale Ã $\mathcal{C}$ au voisinage de l'infini.

2.
$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

(a) g somme de fonctions définies et dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur intervalle :
$g'(t) = \dfrac{1+t-t}{(t+1)^2} - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1-(t+1)}{(t+1)^2} = \dfrac{-t}{(t+1)^2}$.
Pour $t > 0$, $g'(t) < 0$, donc la fonction g est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) On a $g(0) = 0$, la fonction étant décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle est strictement négative sur cet intervalle.

3. (a) La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + \mathrm{e}^{-x} \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

Posons $t = \mathrm{e}^x$, donc $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{t}$. On peut donc écrire :
$f'(x) = f'(t) = -\dfrac{1}{t}\ln(1+t) + \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{1}{t}\left[\dfrac{t}{1+t} - \ln(1+t)\right] = \dfrac{1}{t}g(t)$.
Ou encore $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g\left(\mathrm{e}^x\right)$

(b) On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de f' est celui de g sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc $f' < 0$: la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B

1. F est la primitive de f qui s'annule en $x = 0$. Donc $F'(x) = f(x)$.
La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. (a) $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = \dfrac{1+\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$.
En utilisant le résultat précédent :
$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = \left[t - \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]_0^x = x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + \ln 2$

(b) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\,\mathrm{d}t$.
Posons : $u(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)$; $\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}$
Donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$; $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$.
Toutes ces fonctions sont continues car dérivables ; on peut donc intégrer par parties.
$F(x) = \left[-\mathrm{e}^{-t}\ln\left(1+\mathrm{e}^t\right)\right]_0^x + \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t =$
$-\mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + \ln 2 + x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + \ln 2 + \ln 2 - \ln 2 =$
$F(x) = x - \left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + 2\ln 2$.

(c)
- $F(x) = x - \left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + 2\ln 2 = x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) + 2\ln 2 = x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - f(x) + 2\ln 2$.
- $F(x) = \ln \mathrm{e}^x - \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - f(x) + 2\ln 2 = \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)$.

3. On utilise la deuxiÃ¨me écriture : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = 1$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) = \ln 1 = 0$.

On sait d'autre part que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'où finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2\ln 2$.

4. Calculons $F(x) - x = -\ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\mathrm{e}^x = 1$, puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+\mathrm{e}^x) = \ln 1 = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, on a finalement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) - x = -1 + 2\ln 2$.

La dernière égalité peut s'écrire $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) - x + 1 - 2\ln 2 = 0$, ce qui signifie que la représentation graphique de F a pour asymptote oblique au voisinage de moins l'infini la droite d'équation $y = x - 1 + 2\ln 2$.

Partie C : étude d'une suite

1. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f_n est l'aire du rectangle de côtés 1 et $f(n)$. On peut choisir pour le côté de longueur 1 le segment ayant pour extrémités les points d'abscisses $n-1$ et n.

   u_n est donc la somme des aires des n premiers rectangles.

   Exemple : sur le dessin on a représenté u_3.

2. On calcule $u_{n+1} - u_n = f(n+1) > 0$: la suite est croissante (strictement).

3. (a) La fonction f est décroissante : donc pour tout naturel k non nul et pour t tel que $k-1 \leqslant t \leqslant k$, par décroissance $f(k) \leqslant f(t)$ et puisque $k-1 \leqslant k$:

   $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$, soit $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit par linéarité de l'intégration :

   $u_n \leqslant \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$

   (b) En sommant les inégalités précédentes pour k allant de 1 à n, on obtient

   $u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ c'est-Ã -dire $u_n \leqslant F(n)$ pour tout n non nul.

4. La suite $(F(n))$ est croissante et a pour limite $2\ln 2$ en plus l'infini. On a donc $u_n \leqslant F(n) \leqslant 2\ln 2$.

   La suite (u_n) est croissante et majorée : elle converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2\ln 2$.