Eléments de correction – DS 02

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^k \times 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

2. **Première méthode :** Manipulation des coefficients binômiaux.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \in 1, n$

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} = n\binom{n-1}{p-1}$$

(b) On peut maintenant calculer

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{\mathbf{p=1}}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1}$$

On effectue alors le changement de variable $k = p-1$:

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n \times 2^{n-1}}$$

3. **Seconde méthode :** Dériver une fonction.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto (1+x)^n$$

(a) En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p \times x^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p \times 1^{n-p}$$

On gardera plutôt la seconde formule soit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p \times 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p = 1 + nx + ... + x^n}$$

(b) Ainsi si on dérive $f(x) = (1+x)^n$, on obtient $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et si on dérive l'autre expression, il vient :

$$f'(x) = \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p\right)' = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times p \times x^{p-1}$$

On en déduit donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{n(1+x)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times p \times x^{p-1}}$$

(c) En prenant $x = 1$, on trouve exactement :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times p \times 1^{p-1} = n(1+x)^{n-1}$$

C'est à dire :

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n \times 2^{n-1}}$$

Exercice 2

1. L'équation n'a aucune valeur interdite, nous pouvons donc travailler sur $\mathbb{R}$.
Ainsi $|2+5x| = 4 \Leftrightarrow 2+5x = 4$ ou $2+5x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$ ou $x = -\frac{6}{5}$. Donc l'ensemble des solutions est $S = \{-\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\}$.

2. L'inéquation n'a aucune valeur interdite, nous pouvons donc travailler sur $\mathbb{R}$.
Pour pouvoir résoudre cette inéquation, nous allons étudier le signe de $4 - x^2$ afin de se débarrasser des valeurs absolues. Les racines de $4 - x^2$ sont 2 et -2, et puisque le coefficient de x^2 est négatif, on va donc travailler sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ où $4 - x^2 < 0$ et sur $[-2; 2]$ où $4 - x^2 \geqslant 0$:
• sur $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, $|4 - x^2| > 8 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 8 \Leftrightarrow x^2 - 12 > 0$. Or $x^2 - 12$ admet $-2\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ comme racines, ce polynôme est donc strictement positif sur $]-\infty; -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}; +\infty[\subset]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$;
• sur $[-2; 2]$, $|4 - x^2| > 8 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 8 \Leftrightarrow -4 - x^2 > 0$, inéquation qui n'admet bien sûr aucune solution puisque $-4 - x^2$ est strictement négative.
Ainsi l'ensemble des solutions est $S =]-\infty; -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}; +\infty[$.

3. L'équation $\sqrt{12x - 4} = 2\sqrt{x}$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. Nous devons avoir $12x - 4 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, ce qui donne au final $x \geqslant \frac{1}{3}$, donc cette équation n'est définie que sur $I = [\frac{1}{3}; +\infty[$.
Ainsi :
$\forall x \in I, \sqrt{12x - 4} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 12x - 4 = 4x \Leftrightarrow 16x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. Mais $\frac{1}{4} \notin I$, donc l'ensemble des solutions est vide.

4. A cause de la racine carrée, on travaille sur $[-3, +\infty[$. Le piège se situe ici sur le fait qu'on ne connaît pas à priori le signe de $x + 1$:
— Si $x \geq -1$ alors $x + 1 \geq 0$ et pour tout x dans cet intervalle,

$$\sqrt{x+3} \geq x + 1 \Leftrightarrow x + 3 \geq (x+1)^2 \Leftrightarrow 0 \geq x^2 + x - 2$$

On est alors ramené à déterminer le signe d'un polynôme du second degré dont le discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, les racines sont donc $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $x_2 = -2$. Le polynômes du second degré est donc négatif sur $[-2, 1]$.
— Sinon $x \leq -1$ et $x + 1 \leq 0 \leq \sqrt{x+3}$, ainsi, tout $x \in [-3, -1]$ est aussi solution.
En conclusion $\boxed{S = [-2, 1] \cup [-3, -1] = [-3, 1]}$

Exercice 3 Partie B

a) $[0\,;1[$
b) $]3\,;4[\cup]4\,;5[$
c) $\{4\}$
d) $]-\infty\,;0[\cup[2\,;+\infty[$ (et il n'y a pas d'erreurs !)

Partie C

a) $(\Longrightarrow)$ Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$.
Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.

b) $(\Longrightarrow)$ Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
$(\Longleftarrow)$ Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.