

Devoir Surveillé 02 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. Tableau de signes.
2. Distinguer les cas suivant le signe de $x - 1$ et $x + 1$.
3. Factoriser puis un produit de facteur nul.
4. Somme et produit de x et y : astuce de l'équation du second degré.
5. Attention les solutions doivent être supérieures strictement à 1.

Exercice 2

1. Binôme de Newton avec $1^k 1^{n-k}$.
2. Binôme de Newton avec $(-1)^k 1^{n-k}$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n (-1) \binom{n}{k} + \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

4. A la question 1), on a trouvé une somme égale à 2^n et 2^n divisé par 2 fait 2^{n-1} .

Exercice 3

Voir DS01

Exercice 4

1. La probabilité de tirer une première boule blanche est $\frac{n}{n+8}$ et la probabilité de tirer ensuite une deuxième boule blanche est $\frac{n-1}{n+7}$.

La probabilité de tirer deux boules blanches est donc égale à

$$\frac{n}{n+8} \times \frac{n-1}{n+7} = \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)}.$$

2. (a) Comme à la première question, la probabilité de tirer deux boules rouges est égale à : $\frac{5}{n+8} \times \frac{4}{n+7}$ et la probabilité de tirer deux boules vertes est égale à : $\frac{3}{n+8} \times \frac{2}{n+7}$.

Les évènements « tirer deux boules blanches », « tirer deux boules rouges », « tirer deux boules vertes » étant incompatibles la probabilité de tirer deux boules de même couleur est égale à :

$$\frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \frac{5}{n+8} \times \frac{4}{n+7} + \frac{3}{n+8} \times \frac{2}{n+7} = \frac{n(n-1) + 20 + 6}{(n+8)(n+7)} = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}.$$

- (b) Comme $n \geq 2$, on peut simplifier par n^2 non nul, donc :

$$p(n) = \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{26}{n^2}}{\left(1 + \frac{8}{n}\right) \left(1 + \frac{7}{n}\right)}.$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n) = 1$.

Lorsque le nombre de boules devient très grand la probabilité de tirer deux boules de même couleur sera voisine de la probabilité de tirer deux boules blanches soit presque 1 puisqu'il n'y aura pratiquement plus que cette couleur.

Partie B

$$1. p(4) = \frac{4^2 - 4 + 26}{(4+8)(4+7)} = \frac{38}{132} = \frac{19}{66}.$$

2. (a) Le joueur peut « gagner $40+40-30 = 50$ ou $40+5-30 = 15$ ou $5+5-30 = -20$, qui sont les valeurs prises par la variable aléatoire X .

- (b) • La probabilité de tirer deux fois deux boules de même couleur est égale à $\frac{19}{66} \times \frac{19}{66} = \frac{361}{4356} = p(X = 50)$.

• La probabilité de tirer deux fois des boules de couleurs différentes est égale à :

$$\left(1 - \frac{19}{66}\right) \times \left(1 - \frac{19}{66}\right) = \left(\frac{47}{66}\right)^2 = \frac{2209}{4356} = p(X = -20).$$

$$\text{On a donc } p(X = 15) = 1 - \left(\frac{361}{4356} + \frac{2209}{4356}\right) = 1 - \frac{2570}{4356} = \frac{1786}{4356}.$$

(c) On a donc $E(X) = 50 \times \frac{361}{4356} + 15 \times \frac{1786}{4356} - 20 \times \frac{2209}{4356} = \frac{5}{33}$ (euro).

Exercice 5

- g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
 $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = e^t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$
- g est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 De plus $g(0) = 0$ donc 0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

3. On en déduit les inégalités suivantes :

(a) $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) \geq 0$ donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, e^t \geq t + 1}$
 par ailleurs $\forall t \in \mathbb{R}, t + 1 > t \Rightarrow e^t > t \Rightarrow \frac{t}{e^t} < 1 \Rightarrow -\frac{t}{e^t} > -1 \Rightarrow -te^{-t} > -1$
 d'où $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, e^t > t \text{ et } -te^{-t} > -1}$.

(b) $\forall t > -1, t + 1 > 0$ donc $\ln(t + 1)$ existe.
 Or $\forall t > -1, e^t \geq t + 1 \Rightarrow \ln e^t \geq \ln(t + 1)$ car la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$
 Conclusion : $\boxed{\forall t > -1, t \geq \ln(t + 1)}$

(c) D'après le 2a) on a $\forall x \in \mathbb{R}, -xe^{-x} > -1$ d'où en appliquant le résultat précédent en posant $t = -xe^{-x}$ puisque $t > -1$ il vient : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x}}$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x - x)$.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \ln(e^x(1 - \frac{x}{e^x})) = x^2 - 2 \ln e^x - 2 \ln(1 - xe^{-x}) =$

$$x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x}).$$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - xe^{-x}) = 1$
 or $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - xe^{-x}) = 0$
 par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

(c) $\forall x < 0, f(x) = x^2 - 2 \ln(-x(1 - \frac{e^x}{x})) = x^2 - 2 \ln(-x) - 2 \ln(1 - \frac{e^x}{x})$
 $= x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right) - 2 \ln(1 - \frac{e^x}{x})$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{e^x}{x}) = 1$
 or $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - \frac{e^x}{x}) = 0$
 par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-x)}{(-x)^2} = 0$ formule de croissances comparées
 alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$

(e) La fonction $x \mapsto e^x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ d'après le 2)
 La fonction $X \mapsto \ln X$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
 donc par composition la fonction $x \mapsto \ln(e^x - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 De plus la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 Conclusion : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x - 2 \frac{e^x - 1}{e^x - x} = 2 \frac{xe^x - x^2 - e^x + 1}{e^x - x}$$

$$\text{or } \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x} = 2 \frac{xe^x - x^2 - e^x + 1}{e^x - x}$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$.

D'après le 2a), $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x > 0$ et $e^x - x - 1 \geq 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$ ce qui nous donne le tableau de variation...

(f) On a déjà vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$ donc la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation

$y = x^2 - 2x$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f sont asymptotes en $+\infty$.

$$-2 \ln(1 - xe^{-x}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 - xe^{-x}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - xe^{-x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -xe^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

ainsi $(\mathcal{P})$ est en dessous de $(\mathcal{C})$ sur $]0; +\infty[$ et au dessus sur $] -\infty; 0[$.

5. Soit n un entier naturel, on pose

$$u_n = \int_0^n xe^{-x} dx$$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} xe^{-x} - \int_0^n xe^{-x} = \int_n^{n+1} xe^{-x}$ d'après la relation de Chasles.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [n, n+1], xe^{-x} \geq 0$

alors par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} xe^{-x} \geq 0$ d'où $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Conclusion : la suite u est croissante.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = [-xe^{-x}]_0^n - \int_0^n -e^{-x} dx = -ne^{-n} + [-e^{-x}]_0^n = -ne^{-n} - e^{-n} + 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -ne^{-n} - e^{-n} + 1$$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} ne^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$ croissances comparées

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

6. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole $(\mathcal{P})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ est définie par

$$I_n = -2 \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx$$

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(1 - xe^{-x}) < -xe^{-x} \Rightarrow \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx < \int_0^n -xe^{-x} dx$ par croissance de l'intégrale.

ainsi $I_n > -2 \int_0^n -xe^{-x} dx$

et finalement $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 2u_n$.

(b) On admet que la suite (I_n) a pour limite ℓ .

On a : $\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2u_n = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ell \end{array} \right\} \text{ alors } \ell \geq 2.$
 $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 2u_n$