

Devoir Surveillé 02

Le vendredi 19 Septembre 2025

14h-17h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer les résultats de leurs calculs.

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve. Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

1. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, $(x - 1)(1 - 3x) < 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x+1}{x-1} > \frac{x+3}{x+1}$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$(x-5)(x-7) + (x-5)^2 = 0$$

4. Résoudre le système d'inconnues réelles x et y :

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x^2 + y^2 = 153 \end{cases}$$

(On pourra remarquer que $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$)

5. Résoudre pour x dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6)$$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

2. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

3. En déduire :

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k}$$

4. Conclure que

$$\sum_{k=0, k \text{ impair}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^n \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Exercice 3

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. **Affirmation 1 :** Pour tout réel x : $1 - \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{2}{1 + e^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe $\mathcal{C}$ en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x (1 - x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. **Affirmation 5 :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x} = 0$.

6. **Affirmation 6 :** Pour tout réel x , $1 + e^{2x} \geq 2e^x$.

Exercice 4

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Partie A

- Quelle est la probabilité de tirer une première boule blanche ?
- Sachant qu'on a tiré une première boule blanche, quelle est la probabilité que la seconde le soit aussi ?
- Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
- On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
 - Montrer que $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}$
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B Pour les questions suivantes $n = 4$.

- Calculer $p(4)$.
- Un couple de tirages consiste à tirer successivement et sans remise deux boules de l'urne. Un joueur effectue deux couples de tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second couple de tirages les deux boules tirées lors du premier couple de tirages. Il mise au départ la somme de 30 euros. Pour chaque couple de tirages :
 - si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,
 - si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.
 On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux couples de tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif). On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
 - Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance de X .

Exercice 5

1. Étudier le sens de variation de la fonction g définie pour tout t de $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t - t - 1$.
2. Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $] -\infty ; +\infty[$?
3. En déduire les inégalités suivantes :
 - (a) Pour tout réel t , $e^t \geq t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.
 - (b) Pour tout réel t tel que $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.
 - (c) Pour tout réel x , $\ln(1 - xe^{-x}) \leq -xe^{-x}$.
4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x^2 - 2 \ln(e^x - x)$$

- (a) Montrer que $f(x) = x^2 - 2x - 2 \ln(1 - xe^{-x})$.
- (b) En déduire la limite de f en $+\infty$?
- (c) Montrer que $f(x) = x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right) - 2 \ln\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$.
- (d) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
- (e) Calculer f' et montrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

Dresser le tableau de variation de la fonction f .

- (f) Dans un repère orthonormal (unité : 3 cm), on considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2 - 2x$ et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f .
Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ sont asymptotes en $+\infty$. On pourra pour cela montrer que la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x^2 - 2x)$ est nulle.
Étudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ (signe de la différence).
 - (g) Tracer dans un même repère **l'allure** des courbes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ et les tangentes horizontales $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ à $(\mathcal{C})$.
5. Soit n un entier naturel, on pose

$$u_n = \int_0^n xe^{-x} dx$$

- (a) Démontrer que la suite u de terme général u_n est croissante.
 - (b) Calculer u_n , on pourra d'abord calculer la dérivée de $h : x \mapsto -(x+1)e^{-x}$.
 - (c) Déterminer la limite de la suite u_n .
6. L'aire du domaine (en unités d'aire) limité par les droites d'équation $x = 0$, $x = n$, la parabole $(\mathcal{P})$ et la courbe $(\mathcal{C})$ est définie par

$$I_n = -2 \int_0^n \ln(1 - xe^{-x}) dx$$

- (a) Montrer en utilisant la question 3) des préliminaires que $I_n \geq 2u_n$.
- (b) On admet que la suite (I_n) a pour limite ℓ . Montrer que : $\ell \geq 2$.