Devoir Surveillé 01 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel n : $u_n > 4000$.

   Initialisation : $u_0 = 10000 > 4000$: l'inégalité est vraie au rang 0 ;

   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n > 4000$, alors par produit par $0,95 > 0$, on a $0,95u_n > 0,95 \times 4000$, soit :

   $0,95u_n > 3800$, et en ajoutant 200 à chaque membre :

   $0,95u_n + 200 > 3800 + 200$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 4000$: la relation est vraie au rang $n+1$.

   Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n > 4000$ quel que soit le naturel n.

2. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4000, elle converge vers une limite ℓ, avec $\ell \geqslant 4000$.

1. Pour $n = 0$, on a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

2. Au choix :

   Méthode 1 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95u_n - 3800 = 0,95\left(u_n - \dfrac{3800}{0,95}\right) = 0,95\,(u_n - 4000) = 0,95v_n$.

   L'égalité $v_{n+1} = 0,95v_n$ vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

   Méthode 2 : pour $n \in \mathbb{N}$, on a vu que $u_n > 4000$, donc $v_n = u_n - 4000 > 0$.

   On peut donc calculer : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n + 200 - 4000}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95u_n - 3800}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\left(u_n - \frac{3800}{0,95}\right)}{u_n - 4000} = \dfrac{0,95\,(u_n - 4000)}{u_n - 4000} = 0,95$.

   Cette égalité vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à $0,95$.

3. D'après le résultat précédent, on sait que que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $v_n = v_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.

   Or $v_n = u_n - 4000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4000 = 6000 \times 0,95^n + 4000$.

4. Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 6000 \times 0,95^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4000$ (par somme de limites).

Exercice 2

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = e^{2x} - e^x + 1$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x = X = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$; d'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2. On peut écrire $g(x) = \mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^{-x})$.

   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, on a par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et enfin par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.

3. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et

   $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,(2\mathrm{e}^x - 1)$.

4. D'après la question précédente comme $\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui de $2\mathrm{e}^x - 1$.

   - $2\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) ;
   - $2\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x > 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$;
   - $2\mathrm{e}^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^x < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

   La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty\ ;\ -\ln 2[$ et croissante sur $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$.

   Donc $g(-\ln 2) = \mathrm{e}^{-2\ln 2} - \mathrm{e}^{-\ln 2} + 11 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\ln 2}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 4}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} + 1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

5. Le minimum de la fonction g est supérieur à zéro, donc quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

6. En posant $X = e^x$, $g(x) = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} + 1 = \left(X - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.

   Sous cette écriture on voit que $g(X)$ est un trinôme somme de deux carrés dont l'un est supérieur à zéro, donc $g(X) > 0$.

Partie B

1. Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \ln g(x)$.

   Or on a vu dans la partie précédente que $g(x) > 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = \ln g(x)$ entraîne
   $$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1}.$$
3. Soit $\mathcal{T}_0$ la tangente au point d'abscisse 0 :

   On a $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
   - $f(0) = \ln(1 - 1 + 1) = \ln 1 = 0$;
   - $f'(0) = \dfrac{2-1}{1-1+1} = 1$, donc :

   $M(x\ ;\ y) \in \mathcal{T}_0 \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$.
4. On a vu que $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1} = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ et dans la partie que le dénominateur $g(x) > 0$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $g'(x)$ étudié dans la partie A.

   Donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ -\ln 2[$, d'où la fonction f est décroissante sur cet intervalle et $f'(x) > 0$ sur $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$, d'où la fonction f est croissante sur cet intervalle.
5. - $f(-\ln 2) = \ln g(-\ln 2) = \ln \dfrac{3}{4} \approx -0,29$;
   - On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc par composition $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln g(x) = +\infty$.

   La fonction f est continue car dérivable sur $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$, strictement croissante de $f(-\ln 2) < 2$ à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique

   $\alpha \in]-\ln 2\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

   La calculatrice donne :

   $f(1) \approx 1,7$ et $f(2) \approx 3,8$, donc $1 < \alpha < 2$;

   $f(1,1) \approx 1,9$ et $f(1,2) \approx 2,2$, donc $1,1 < \alpha < 1,2$;

   $f(1,12) \approx 1,99$ et $f(1,13) \approx 2,01$, donc $1,12 < \alpha < 1,13$.

Partie C

Conjecture 1 : d'après le résultat précédent elle est vraie ;

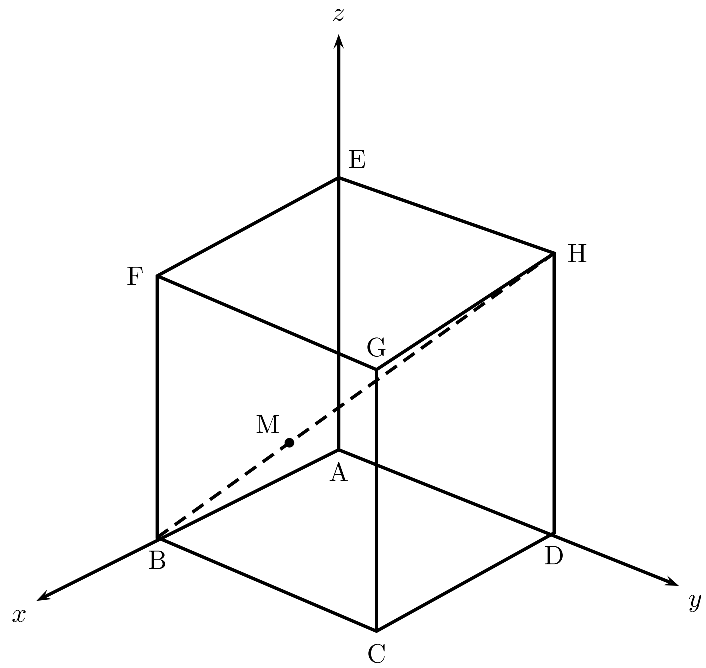
Conjecture 2 : elle est fausse f est croissante sur $]-\ln 2\ ;\ +\infty[$;

Conjecture 3 : on a vu que l'équation de cette tangente est $y = x + 1$: la conjecture est fausse.

Exercice 3

1. Dans le repère (A ; Vect AB, Vect AD, Vect AE), on a

   B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).



2. (a) [EG], [GD] et [ED] sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc EG = GD = ED = $\sqrt{2}$: le triangle EGD est équilatéral.

   (b) Puisque $c = \sqrt{2}$, on a $\mathcal{A}(\text{EGD}) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. On a $\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{BM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{BH}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{\text{M}} - 1\\y_{\text{M}} - 0\\z_{\text{M}} - 0\end{pmatrix}$.

   On a donc : $x_{\text{M}} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$; $y_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$; $z_{\text{M}} = \dfrac{1}{3}$.

   Conclusion : M a pour coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\right)$.
4. (a) On a $\overrightarrow{\text{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{EG}} = -1 + 1 + 0 = 0$:

   $\overrightarrow{\text{ED}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$: donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{ED}} = 0 + 1 - 1 = 0$.

   Conclusion : $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.

(b) On sait qu'un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a un vecteur normal de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, donc :

$P(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{EGD}) \Leftrightarrow -x+y+z+d=0$.

Comme E$(0\,;\,0\,;\,1)\in$ (EGD) $\Leftrightarrow 0+0+1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$.

Finalement : le plan (EGD) a pour équation $-x+y+z-1=0$.

(c) La droite $\mathcal{D}$ contient M et a pour vecteur directeur $\text{Vect}\,n$ vecteur normal au plan (EGD), donc avec $\text{Vect}\,\text{M}P \begin{pmatrix} x-\frac{2}{3} \\ y-\frac{2}{3} \\ z-\frac{1}{3} \end{pmatrix}$:

$P(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{Vect}\,\text{M}P = t\ \text{Vect}\,n$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-\frac{2}{3} & = & -t \\ y-\frac{1}{3} & = & t \\ z-\frac{1}{3} & = & t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3}-t \\ y & = & \frac{1}{3}+t \\ z & = & \frac{1}{3}+t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Exercice 4
Partie 1

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + \mathrm{e}^{-x}$.

1. On sait que les solutions de l'équation $(H)\ :\ y'=-y$ sont les fonctions $x \longmapsto K\mathrm{e}^{-x}$, avec $K\in\mathbb{R}$.
2. Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x} + K\mathrm{e}^{-x} = (x+K)\mathrm{e}^{-x},\ K\in\mathbb{R}.$$

3. Avec $f(x)=(x+K)\mathrm{e}^{-x}$ et $f(0)=2$, on a : $(0+K)\mathrm{e}^{-0}=2 \Leftrightarrow K=2$.
   Conclusion : $f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie 2

1. (a) Puisque f est solution de l'équation différentielle (E) ; on a donc
$$f'(x) = -f(x)+\mathrm{e}^{-x} = -(x+2)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(-x-2+1) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

(b) Comme quel que soit $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x}>0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-x-1$. Donc :

$-x-1>0 \Leftrightarrow -1>x \Leftrightarrow x<-1$;

$-x-1<0 \Leftrightarrow -1<x \Leftrightarrow x>-1$;

$-x-1=0 \Leftrightarrow -1=x$.

La fonction est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -1[$, décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et a donc un maximum $f(-1)=(-1+2)\mathrm{e}^{-(-1)}=\mathrm{e}$.

2. (a) De $f'(x)=-f(x)+\mathrm{e}^{-x}$, on obtient en dérivant :
$$f''(x) = -f'(x)-\mathrm{e}^{-x} = -(-x-1)\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

(b) D'après le résultat précédent sur $[0\ ;\ +\infty[$, $x\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0$, donc le produit $x\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$: la dérivée seconde est positive, la fonction f est convexe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 5
Partie A - Etude d'une fonction

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1},$$

1. Pour tout réel$x$:

$f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{\mathrm{e}^{-2x}+1}$ soit en multipliant chaque terme par e^{2x} :

$f(-x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = -f(x)$: la fonction f est impaire.

2. • Calculons : $f(x)+1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}+1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1+\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1} > 0$ comme quotient de deux termes supérieurs à zéro.Donc pour tout réel x, $f(x)>-1$.

   • Calculons de même : $f(x)-1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}-1 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1-\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} = \dfrac{-2}{\mathrm{e}^{2x}+1} < 0$ car le dénominateur est positif.

   $f(x)-1<0 \Leftrightarrow f(x)<1$.

   f est minorée par -1 et majorée par 1.

3. • On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de moins l'infini.

   • En multipliant chaque terme par e^{-2x}, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

   Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} = 1$. Ce résultat signifie que la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à Γ au voisinage de plus l'infini.

4. La fonction f est dérivable comme quotients de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas et sur $\mathbb{R}$,
$f'(x) = \dfrac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right) - 2e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} > 0$, car quotient de termes supérieurs à zéro.

Conclusion f est strictement croissante de -1 à 1.

f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1, s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois, en α tel que $f(\alpha)=0$.

Or $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=\ln 1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Conclusion :

$f(x)<0$, pour $x<0$;

$f(0)=0$;

$f(x)>0$, pour $x>0$.

5. (a) f étant continue sur $\mathbb{R}$ de -1 à 1, f prend la valeur $\alpha \in]-1\ ;\ 1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires une fois , en x_0 tel que $f(x_0)=\alpha$.

On a donc $f(x_0)=\alpha \Leftrightarrow \dfrac{e^{2x_0}-1}{e^{2x_0}+1}=\alpha \Leftrightarrow e^{2x_0}-1=\alpha\left(e^{2x_0}+1\right) \Leftrightarrow e^{2x_0}(1-\alpha)=1+\alpha \Leftrightarrow e^{2x_0}=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$ car $\alpha \neq 1$.

Donc $2x_0 = \ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$ et enfin $x_0=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)$.

(b) Pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$, on a donc $x_0=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$.

Partie B - Tangentes à la courbe

1. $M(x\ ;\ y)\in\Delta_1 \Leftrightarrow y-f(0)=f'(0)(x-0)$. Or $f(0)=0$ et $f'(0)=\dfrac{4}{4}=1$. D'où :
$M(x\ ;\ y)\in\Delta_1 \Leftrightarrow y=x$.

2. Soit $1-f^2(t)=1-\left(\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}\right)^2=\dfrac{\left(e^{2t}+1\right)^2-\left(e^{2t}-1\right)^2}{\left(e^{2t}+1\right)^2}=\dfrac{4e^{2t}}{\left(e^{2t}+1\right)^2}=f'(t)$.

On a vu que $-1<f(t)<1$, donc $0\leqslant f(t)<1$, puis $0\leqslant[f(t)]^2<1$,
$-1<-[f(t)]^2\leqslant 0$ et enfin $0<1-[f(t)]^2\leqslant 1$.

Finalement $0<f'(t)\leqslant 1$.

La dérivée est supérieure à zéro (on le savait fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$), mais est majorée par 1 valeur atteinte comme on l'a vu en 0.

3. On vient de voir que $0<f'(t)\leqslant 1$,donc par encadrement d'intégrales de fonctions positives sur l'intervalle $[0\ ;\ x]$, avec $x\geqslant 0$,
$\displaystyle\int_0^x 0\,\mathrm{d}t<\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x 1\,\mathrm{d}t$, soit : $\displaystyle 0<\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant x$.

Mais on sait que la fonction f est l'intégrale de sa dérivée sur l'intervalle $[0\ ;\ x]$ qui s'annule en $x=0$, donc $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)$ et l'encadrement précédent devient $0<f(x)\leqslant x$.

On en déduit que $f(x)-x\leqslant 0$ ce qui signifie que Γ est au dessous de Δ_1 sauf pour $x=0$ où les deux courbes ont un point commun.

4. On a $f(x_A)=\dfrac{1}{2}$.

On sait que $f'(x_A)=1-(f(x_A))^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$M(x\ ;\ y)\in\Delta_2 \Leftrightarrow y-f(x_A)=f'\left(\frac{1}{2}\right)(x-x_A)$.

Or on a démontré à la question 5. b. que la solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ est le nombre $x_0=\frac{1}{2}\ln 3$.

L'équation est donc :

$M(x\ ;\ y)\in\Delta_2 \Leftrightarrow y-\dfrac{1}{2}=\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{2}\ln 3\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{4ex}{(e+1)^2}+\dfrac{e-1}{e+1}-\dfrac{2e}{(e+1)^2}$.

Finalement $M(x\ ;\ y)\in\Delta_2 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\ln 3$.

5. Il faut résoudre l'équation $f'(x)=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 8e^{2x}=\left(e^{2x}+1\right)^2 \Leftrightarrow 8e^{2x}=e^{4x}+2e^{2x}+1 \Leftrightarrow e^{4x}-6e^{2x}+1=0$.

Posons $X=e^{2x}>0$; l'équation devient $X^2-6X+1=0$

On a $\delta=36-4=32=\left(4\sqrt{2}\right)^2>0$; il y a deux solutions :

$X_1=e^{2x_1}=\dfrac{6+4\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{2}$ et $X_2=3-2\sqrt{2}=e^{2x_2}$ qui n'a pas de solution.

$e^{2x_1}=3+2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_1=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow x_1=\dfrac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$.

Or $3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2$, donc finalement :

$x_1=\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)^2=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Pour calculer l'image de ce nombre on utilise la relation : $1-f(t)]^2=f'(t)$.

$f\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2=1-f'\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$; donc $f\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie C - Calcul d'intégrales

1. En multipliant chaque terme de $f(x)$ par e^{-x}, on obtient $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}$.

   En posant $u(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x) = \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$. Donc $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. On reconnaît la dérivée de $\ln|u(x)| = \ln u(x)$, car $u(x)$ est la somme de deux termes supérieurs à zéro.

   Conclusion : $\ln u(x)$ est une primitive de $f(x)$.

2. On a vu que pour $x > 0$, donc en particulier sur $[0\,;\,1]$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire de la surface comprise entre Γ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale (en unités d'aire) à $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   On a vu que pour $x > 0$ la courbe est sous la droite d'équation $y = x$, donc l'aire en unité d'aire de la surface comprise entre Γ, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à :

   $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$

   $\displaystyle\int_0^1 [x - f(x)]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 =$

   $\dfrac{1^2}{2} - \ln\left(\mathrm{e}^{1} + \mathrm{e}^{-1}\right) - \dfrac{0^2}{2} + \ln\left(\mathrm{e}^{0} + \mathrm{e}^{-0}\right) = \dfrac{1}{2} - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) + \ln 2 = \dfrac{1}{2} + \ln 2 - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right)$.

   L'unité d'aire étant égale à 16 cm^2, l'aire demandée est égale à

   $8 + 16\ln 2 - 16\ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right)$.

   Voir la surface hachurée plus haut.

3. On a vu que pour tout réel x, $[f(x)]^2 = 1 - f'(x)$, donc :

   $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - f'(x))\,\mathrm{d}x = [x - f(x)]_0^1 = 1 - f(1) - 0 + f(0) = 1 - f(1) = 1 - \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1 - \mathrm{e}^2 + 1}{\mathrm{e}^2 + 1} = \frac{2}{\mathrm{e}^2 + 1}$

4. Toujours en utilisant la relation entre f et f' :

   $\displaystyle\int_0^1 x\left(1 - [f(x)]^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x.$

   En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = f'(x)$, on a :

   $u'(x) = 1$ et $v(x) = f(x)$. Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur $[0\,;\,1]$; on peut donc intégrer par parties :

   $\displaystyle\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, soit en utilisant le résultant de la question C. 1. :

   $\displaystyle\int_0^1 x f'(x)\,\mathrm{d}x = [x f(x)]_0^1 - \left[\ln\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) - 0 + \ln 2 = \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}} - \ln\left(\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}\right) - \ln\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}} - \ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \ln\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$

   - Il suit :

   $\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\,\mathrm{d}x =$

   $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x[1 - f(x)^2]\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right) =$

   $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^2 + 1} - \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 + 1}{2\mathrm{e}}\right).$