Devoir Maison 09

Pour le lundi 16 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynômiale $P_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + x^2 + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Etude des fonctions polynômiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1}, \text{ où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Etudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

- (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 2$.

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

5. Ecrire un programme en langage Python qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$

1. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$ et tout $x \in [0; +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1; +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.