Devoir Maison 09 - Eléments de Correction

Exercice 1
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n \ : \ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^{\,h} \\ &= -\frac{(-x)^{2n}-1}{-x-1} = \frac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{aligned}$$

2. P_n' est du signe de $x^{2n}-1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \to x^{2n}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puisque $2n$ est pair) donc

x	0		1		$+\infty$
$x^{2n}-1$		$- \nearrow$	0	$\nearrow +$	
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

en $+\infty$ on a : $P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n}\left(-x^{2n-1} + \frac{x^{2-2n}}{2} + \ldots + \frac{-x^{-1}}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \to +\infty$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$ la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. On utilise alors le théorème de bijection :

P_n est continue et strictement croissante sur $]1,2]$ donc bijective de $]1,2]$ dans $]\lim_1 f, f(2)] =]f(1), f(2)]$

Or $f(1) < 0 \leq f(2)$ donc $0 \in]f(1), f(2)]$

Et l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution $x_n \in]1,2]$

Et comme P_n est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, elle n'a pas d'autres solutions sur cet intervalle.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, admet une solution et une seule notée x_n sur $[1,+\infty[$, et $1 < x_n \leqslant 2$

6. On programme la méthode de dichotomie pour programmer le calcul de x_2 à 10^{-3} près :On utilise pour raccourcir les calculs que $P_2(x) = -x + x^2/2 - x^3/3 + x^4/4 = x[-1 + x(1/2 + x[-1/3 + x/4])]$

```
def p(x:real):
    return x*(-1+x(1/2+x(-1/3+x/4)));

def dichotomie():
    a=0
    b=1
    while abs(b-a)> 10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if p(c)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    return b
```

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$: $P_n'(x)=\dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$. P_n est donc la primitive dont on a besoin pour l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x)-P_n(0)\\ &= P_n(x)\end{aligned}$$

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n)=0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}=0$ et par Chasles $\int_0^1\frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt+\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt=0$ d'où

$$\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt=-\int_0^1\frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt=\int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt \qquad ((1))$$

3. On étudie les variations de la différen,e : Soit $f(x)=t^{2n}-1-n(t^2-1)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $f'(t)=2nt^{2n-1}-2nt=2nt\left(t^{2n-2}-1\right)$.
   et pour $n\geq 1$ on aura $2n-2\geq 0$ donc si $t\geq 1$alors $t^{2n-2}\geq 1^{2n-2}$ d'où $f'(t)\geq 0$
   Donc pour $n\geq 1$, f est croissante sur $[1,+\infty[$.
   De plus $f(1)=0$ donc pour tout $t\in[1,+\infty[$: $f(t)\geq 0$ et

$$t^{2n}-1\geq n(t^2-1)$$

4. On a alors tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour $t\geq 1$

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1}\geq\frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}$$

comme $1\leq x_n$ (bornes de l'intégrale croisssantes)

$$\begin{aligned}\int_1^{x_n}\frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt &\geq \int_1^{x_n}\frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}\,dt=\int_1^{x_n}n(t-1)\,dt=n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n}\\ &\geq \frac{n(x_n-1)^2}{2}\end{aligned}$$

que l'on réintroduit dansl'équation du **??** pour obtenir :

$$\frac{n(x_n-1)^2}{2}\leq\int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1-t^{2n}\leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1\frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt\leq\int_0^1\frac{1}{t+1}\,dt=[\ln(t+1)]_0^1=\ln(2)$$

d'où finalement :

$$\begin{aligned}0 &\leq \frac{n(x_n-1)^2}{2}\leq\ln(2) \quad \text{d'où}\\ 0 &< (x_n-1)^2\leqslant\frac{2\ln 2}{n} \quad \text{et}\\ 0 &< x_n-1\leqslant\frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n-1\geq 0\end{aligned}$$

5. Et par encadrement $x_n-1\to 0$ et donc $x_n\to 1$ quand $n\to+\infty$