Devoir Maison 08

Pour le lundi 2 décembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On se propose de tracer la courbe $(\mathcal{C})$ représentant la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\tan x}{\ln(1 + \sin x)}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. Quelle est la période de f ?

   Montrer que le point $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$. Pour cela on vérifiera que $\forall x \in D_f$, on a $\pi - x$ qui appartient à D_f et que $f(\pi - x) = -f(x)$.

   En déduire qu'il est possible de limiter l'étude de f à l'ensemble $\mathcal{E} =]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$

2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, autrement dit que f admet une limite finie en 0.

Désormais, f désigne cette fonction prolongée en posant $f(0)$ égal à la limite obtenue et $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3. Étudier les limites de f aux extrémités de I. On admettra que la limite en $\frac{\pi}{2}^-$ vaut $+\infty$.
4. Pour $0 < t < 2$, on pose $g(t) = t^2 - 3t + 2 + \ln(t)$.
   (a) Étudier les variations de g sur l'intervalle $J =]0, 2[$.

   En déduire qu'il existe un réel $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que $g(a) = 0$.

   Préciser le signe de g sur $]0, 2[$.

   (b) Calculer la dérivée f' de f et exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(t)$ où $t = 1 + \sin x$.

   En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau des variations de f sur $I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

   Donner une expression du minimum m en fonction de a.
5. Tracer la portion de $(\mathcal{C})$ représentant f pour $-\pi < x < 2\pi$

On donne les valeurs approchées : $\begin{cases} a \approx 0,32 \\ m \approx 0,81 \end{cases}$