Devoir Maison 08 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. $f(x)=\frac{\tan x}{\ln(1+\sin x)}$ est définie si et seulement si

$$\begin{cases} \tan x \text{ est défini} & \Leftrightarrow \quad x\notin \dfrac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z} \\ \ln(1+\sin x) \text{ est défini} & \Leftrightarrow \quad 1+\sin x>0 \quad \Leftrightarrow x\notin -\dfrac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z} \\ \ln(1+\sin x)\neq 0 & \Leftrightarrow \quad x\notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalement : $\boxed{f \text{ est définie pour } x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}}$

Les fonctions "tan" et "sin" sont 2π-périodiques donc $\boxed{f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}}$

Montrer que le point $(\dfrac{\pi}{2},0)$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$, revient à montrer que

$$M\,(x,y)\in\mathcal{C}\ \Rightarrow\ M'\,(\pi-x,-y)\in\mathcal{C}$$

c'est-à-dire $\begin{cases} (1) & x\neq k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})\ \Rightarrow\ \pi-x\neq k'\dfrac{\pi}{2}\ (k'\in\mathbb{Z}) \\ (2) & f(\pi-x)=-f(x) \end{cases}$

(1) est évident (par contraposée)

(2) est vérifié puisque $f(\pi-x)=\frac{\tan(\pi-x)}{\ln\big(1-\sin(\pi-x)\big)}=\frac{-\tan x}{\ln(1-\sin x)}=-f(x)$

$\boxed{\text{Le point } (\frac{\pi}{2},0) \text{ est centre de symétrie de } (\mathcal{C})}$

Étant 2π-périodique, on limite l'étude à un intervalle de longueur 2π (accompagnée de translations de vecteurs $(2k\pi,0),\ k\in\mathbb{Z}$)

Le point $(\frac{\pi}{2},0)$ étant centre de symétrie, on centre l'intervalle en $\frac{\pi}{2}$ (accompagnée de la symétrie centrale)

L'étude se fait donc sur l'intersection entre l'ensemble de définition et $[\,\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$

soit sur l'ensemble $\boxed{\mathcal{E}=]-\frac{\pi}{2}\,,\,0\,[\,\cup\,]\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,[}$

2. Par un calcul de limite en utilisant les limites particulières, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0)=1}$

3. Quand $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$: $\tan x\to+\infty$ et $\ln(1+\sin x)\to\ln 2>0$ donc $\boxed{\lim_{\pi/2^-} f=+\infty}$

Quand $x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+$: en posant $x=-\frac{\pi}{2}+h,\ h\to 0^+$ nous avons

$$f(x)=f(-\frac{\pi}{2}+h)=\frac{\tan(-\frac{\pi}{2}+h)}{\ln\left(1+\sin(-\frac{\pi}{2}+h)\right)}=-\frac{\cos h}{\sin h\ln(1-\cos h)}$$

Comme $1-\cos h\sim\frac{h^2}{2}$ qui tend vers $0\neq 1$ nous avons finalement

$$f(-\tfrac{\pi}{2}+h)\sim-\frac{1}{h\ln\frac{h^2}{2}}=-\frac{1}{\underbrace{2\,h\,\ln h}_{\to 0^-}-\underbrace{h\ln 2}_{\to 0^+}}$$

$\boxed{\lim_{-\pi/2^+} f=+\infty}$

4. (a) $g(t)=t^2-3t+2+\ln(t)$, $J=]\,0\,,\,2\,[$

g est définie, continue, dérivable sur J.

$g'(t)=2\,t-3+\frac{1}{t}=\frac{(t-1)\,(2\,t-1)}{t}$

Le tableau des variations est immédiat :

t	0		$\frac{1}{2}$		1		2
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

g est décroissante puis croissante sur $[\frac{1}{2};2]$ donc g admet un minimum nul sur cet intervalle et $g(t)\geq 0$ quand $\frac{1}{2}<t<2$. Par ailleurs g continue strictement croissante sur $]0;\frac{1}{2}]$, par bijection g s'annule une fois et une seule en $a\in]\,0\,,\,\frac{1}{2}\,[$

$\boxed{0<t<a\ \Rightarrow\ g(t)<0 \quad\text{et}\quad (a<t<2 \text{ et } t\neq 1)\ \Rightarrow\ g(t)>0}$

(b) Pour tout $x\in\mathcal{E}$, nous avons $f'(x)=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}\ln(1+\sin x)-\tan x\,\frac{\cos x}{1+\sin x}}{\ln^2(1+\sin x)}$

$=\frac{\frac{1}{1-\sin^2 x}\ln(1+\sin x)-\frac{\sin x}{1+\sin x}}{\ln(1+\sin x)}$

$=\frac{\ln(1+\sin x)-\sin x\,(1-\sin x)}{(1-\sin x)\,(1+\sin x)\,\ln^2(1+\sin x)}$

En posant $t=1+\sin x$ nous obtenons $\boxed{f'(x)=\frac{\ln t+(t-1)\,(t-2)}{t\,(2-t)\,\ln^2 t}}$

Sur $\mathcal{E}$: $-1<\sin x<1\ \Rightarrow\ 0<t<2$ avec $x\neq 0\ \Rightarrow\ t\neq 1$.

De plus sur $\mathcal{E}$ la fonction "sin" est croissante :

— le numérateur $g(t)$ est de signe connu
positif si $a<t=1+\sin x$
donc pour $x>\text{Arcsin}(a-1)$

— le dénominateur est strictement positif d'où le signe de f' sur $\mathcal{E}$.

De plus $f'(0)=\frac{1}{2}$ d'où les variations

x	$-\frac{\pi}{2}$		b		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

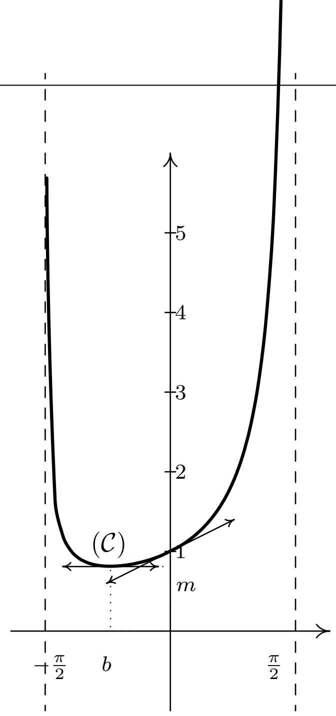
$$b=\text{Arcsin}(a-1)\approx-0,75$$

Calcul du minimum :

comme $b = \text{Arcsin}(a-1) \Rightarrow \sin b = a - 1$

et $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2} \to \cos b > 0$ donc $\cos b = \sqrt{1-(a-1)^2} = \sqrt{2\,a - a^2}$

$m = f(b) = \frac{\sin b}{\cos b \cdot \ln(1+\sin b)}$ d'où $\boxed{m = \frac{a-1}{\ln a \cdot \sqrt{2\,a-a^2}}}$



5. Résumons ces différents résultats :