Devoir Maison 07

Pour le lundi 25 novembre 2024

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

On considère trois suites réelles $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 5, v_0 = 3, w_0 = 1$$

et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = 4u_n + v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

On se propose d'exprimer les termes de ces trois suites en fonction de l'entier naturel n et ce, de deux manières distinctes.

1. **Première méthode**

   (a) Démontrer que la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique de raison 5 et en déduire ,pour tout entier naturel n, l'expression de $u_n + v_n$ en fonction de n.

   (b) Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique et en déduire ,pour tout entier naturel n, l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.

   (c) Déduire des deux questions précédentes les expressions de u_n et de v_n en fonction de l'entier naturel n.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. En remarquant que pour tout entier naturel k, $v_k = w_{k+1} - w_k$, exprimer la somme :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$$

   en fonction de w_n ; en déduire l'expression de w_n en fonction de n et vérifier que cette formule reste valable pour le cas $n = 0$.

2. **Deuxième méthode**

   Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n, on note X_n, la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Reconnaître le résultat du produit matriciel AX_n.

   (b) Montrer alors par récurrence que , pour tout entier naturel n :

   $$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) On pose $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

(d) On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D et en déduire D^n pour tout entier naturel n

(e) Démontrer que ,pour tout entier naturel n , $A^n = PD^nP^{-1}$, puis calculer A^n.

(f) Retrouver les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 2 (optionnel)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \text{Arctan}\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

1. Déterminer son ensemble de définition
2. Montrer que des propriétés de f permettent de limiter l'ensemble d'étude de f à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, montrer que
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$
4. Tracer la représentation graphique de f sur un intervalle d'amplitude 4π.