Devoir Maison 07 - Eléments de Correction

Exercice 1

1. **Première méthode**

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + 4v_n + 4u_n + v_n = 5(u_n + v_n)$
donc la suite $(u_n + v_n)$ est géométrique de raison 5, et de 1^{er} terme $u_0 + v_0 = 8$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n + v_n = 5^n \times 8.$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + 4v_n - (4u_n + v_n) = -3(u_n - v_n)$,
donc la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison -3, et de 1^{er} terme $u_0 - v_0 = 2$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n - v_n = (-3)^n \times 2.$$

(c) En ajoutant puis en retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient $2u_n$ et $2v_n$, d'où :

$$u_n = 4 \times 5^n + (-3)^n \quad \text{et} \quad v_n = 4 \times 5^n - (-3)^n.$$

(d) L'énoncé donne pour tout k de $\mathbb{N}$, $w_{k+1} = v_k + w_k$, donc $v_k = w_{k+1} - w_k$, et donc :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = (w_1 - w_0) + (w_2 - w_1) + \cdots + (w_n - w_{n-1}) = w_n - w_0 = w_n - 1.$$

Donc $w_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Or on a vu que $v_k = 4 \times 5^k - (-3)^k$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} v_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(4 \times 5^k - (-3)^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 4 \times 5^k - \sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k = 4\frac{1-5^n}{1-5} - \frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} \\ &= 5^n - 1 - \frac{1}{4}(1 - (-3)^n) = 5^n - \frac{5}{4} + \frac{1}{4}(-3)^n, \end{aligned}$$

soit : $w_n = 5^n - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}(-3)^{n+1}$

2. **Deuxième méthode**

(a) $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 4v_n \\ 4u_n + v_n \\ v_n + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.

(b) Soit $P(n)$ la propriété $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; la ppté est vraie pour $n = 0$.

Soit n un entier naturel quelconque, on suppose que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;Alors, comme

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = AA^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

la ppté est héréditaire.

Donc finalement, pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - L_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \sim \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ -1 & \cdots \\ 1 & \cdots \end{pmatrix}$$

réduite triangulaire
pivots tous non nuls
donc P est inversible

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \\ 1/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \text{ donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/8 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \\ 1/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ -2 & \cdots \\ 1 & \cdots \end{pmatrix}$$

(d) $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; comme D est diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$ soit $D^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}$

(e) Montrons par récurrence que $\forall n$ de $\mathbb{N}^\times,\ A^n = PD^nP^{-1}$:
Préambule : on sait que $D = P^{-1}AP$, donc en multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P, $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, soit $A = PDP^{-1}$.

— Au rang 0 : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$ et $A^0 = I$ -convention- donc $A^0 = PD^0P^{-1}$; relation vraie au rang 0

— Si pour un n qq supérieur ou égal à 1, on suppose $A^n = P.D^nP^{-1}$, alors, comme $A^{n+1} = A^nA$,

$$A^{n+1} = PD^n\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1};$$

la relation est héréditaire, donc finalement : $\forall n$ de $\mathbb{N}^\times,\ A^n = PD^nP^{-1}$

D'où le calcul de A^n :

$$\begin{aligned} PD^nP^{-1} &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4\times(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ -4\times(-3)^n & 0 & 4\times 5^n \\ (-3)^n & 1 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$A^n = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4\times(-3)^n + 4\times 5^n & -4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ -4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2 + 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix}$$

ou

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}5^n & -\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}5^n & 0 \\ -\frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}5^n & \frac{1}{2}(-3)^n + \frac{1}{2}5^n & 0 \\ \frac{1}{8}(-3)^n - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}5^n & -\frac{1}{8}(-3)^n + \frac{1}{8}5^n & 1 \end{pmatrix}$$

(f) Et donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4\times(-3)^n + 4\times 5^n & -4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ -4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 4\times(-3)^n + 4\times 5^n & 0 \\ (-3)^n - 2 + 5^n & -(-3)^n + 5^n & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\begin{cases} u_n = \frac{5}{2}(-3)^n + \frac{5}{2}5^n - \frac{3}{2}(-3)^n + \frac{3}{2}5^n \\ v_n = -\frac{5}{2}(-3)^n + \frac{5}{2}5^n + \frac{3}{2}(-3)^n + \frac{3}{2}5^n \\ w_n = \frac{5}{8}(-3)^n - \frac{5}{4} + \frac{5}{8}5^n - \frac{3}{8}(-3)^n + \frac{3}{8}5^n + 1 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{aligned} u_n &= (-3)^n + 4\times 5^n \\ v_n &= -(-3)^n + 4\times 5^n \\ w_n &= \frac{1}{4}(-3)^n + 5^n - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 2 (optionnel)

1. *Conditions de définition :*
   Arctan est définie sur $\mathbb{R}$,
   Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est définie si et seulement si :
   — $1 + \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \not\equiv -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$
   — $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} \geqslant 0$ qui est toujours vrai
   On obtient $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \frac{-\pi}{2}\mathbb{Z}}$
2. *Limiter l'ensemble d'étude :*
   f est 2π-périodique, et elle vérifie $\forall x \in D_f$, on a $\pi - x \in D_f$ et $f(\pi - x) = f(x)$.
   — On limite l'étude à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, moitié d'un intervalle de longueur 2π centré en $\frac{\pi}{2}$.
   — On complète ensuite la représentation par
     — une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$
     — suivie de translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{i}\quad k \in \mathbb{Z}$

   Finalement, on étudie f sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
3. *Transformons l'expression :*
   — Remarquons que

   $$\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\cos(\frac{\pi}{2} - x)}{1+\cos(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}$$

   où $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
   donc

   $$f(x) = \text{Arctan}\sqrt{\tan^2\theta} = \text{Arctan}\left|\tan\theta\right| \qquad \Rightarrow \tan\big(f(x)\big) = \left|\tan\theta\right|$$

   — Comme $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ il vient $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. Ainsi : $\tan\big(f(x)\big) = \tan\theta$
   — $f(x)$ et θ sont sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle où "tan" est injective.

   $\boxed{\text{Sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] :\quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}$
   puis la symétrie
   et les translations