Devoir Maison 06

Pour le lundi 18 Novembre 2024

> La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les étudiants doivent encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie l'exponentielle d'une matrice pour une matrice carrée d'ordre 3, puis d'ordre 2.

Partie I - Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 3.

Soient A et P les matrice définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}
2. On pose $T = P\,A\,P^{-1}$.
   (a) Calculer la matrice T
   (b) Calculer T^2, T^3, puis T^n pour out entier naturel $n \geq 3$.
3. En déduire que :
   $$\forall n \geq 3, \quad A^n = 0$$
   où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
4. Pour tout réel t, on défint la matrice $E(t)$ par :
   $$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   où I désigne la matrice unité d'ordre 3.
   (a) Montrer que :
   $$\forall (t, t') \in \mathbb{R}^2, \quad E(t)\,E(t') = E(t + t')$$
   (b) Pour tout t réel, calculer $E(t)\,E(-t)$. En déduire que la matrice $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$.
   (c) Pour tout t réel et pour tout entier naturel n, déterminer $[E(t)]^n$ en fonction de $I,\ A,\ A^2,\ t$ et n.

Partie II - Exponentielle d'une matrice carrée d'ordre 2.

Soient B et D les matrices définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n non nul, et pour tout réel t, on définit la matrice $E_n(t)$ par :

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k \text{ que l'on note } E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & c_n(t) \\ b_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Vérifier que
$$Q^{-1}BQ=D$$
3. Pour tout entier naturel n, montrer que :
$$B^n=\begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$
4. Montrer que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_n\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2t^k-\left(2t\right)^k}{k!}$$
exprimer de même $b_n\left(t\right),\ c_n\left(t\right),\ d_n\left(t\right)$ sous le forme d'une somme.
5. Déterminer les limites de $a_n\left(t\right),\ b_n\left(t\right),\ c_n\left(t\right),\ d_n\left(t\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
6. Pour tout t réel, onpose alors :
$$E\left(t\right)=\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n\left(t\right) & \lim\limits_{n\to+\infty} c_n\left(t\right) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n\left(t\right) & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n\left(t\right) \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que
   $$E\left(t\right)=\begin{pmatrix} 2e^t-e^{2t} & e^t-e^{2t} \\ 2e^{2t}-2e^t & 2e^{2t}-e^t \end{pmatrix}$$
   (b) Déterminer les matrice E_1 et E_2, telles que pour tout t réel on ait :
   $$E\left(t\right)=e^tE_1+e^{2t}E_2$$
   (c) Calculer $E_1^2,\ E_2^2,\ E_1E_2,\ E_2E_1$.
   (d) En déduire que pour tout t réel, $E\left(t\right)$ est inversible et déterminer son inverse.